

F A C H A R B E I T
=====

in Mathematik

1984/85

Thema: Die Konchoide

Autor: Axel Findling

Max-Born-Gymnasium Germering

Betreuer: Herr Baumann

Bewertung: 15 Punkte

Inhalt:

Seite:

<u>1. Definition der Konchoide</u>	4
1.1. Zur Wahl der Definition	4
1.2. Definition	4
 <u>2. Konchoiden einer Geraden</u>	 4
2.1. Beschreibung und Bezeichnungen	4
2.2. Gleichungen der Konchoide	5
2.2.1. Mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen	5
2.2.2. Als Gleichung 4. Ordnung	7
2.3. Kurvendiskussion der Konchoide	8
2.3.1. Sonderfälle	8
2.3.2. Verhalten der Konchoide bei $x=a$	9
2.3.3. Nullstellen	9
2.3.4. Symmetrieverhalten	9
2.3.5. Bestimmung der Tangenten	9
2.3.5.1. Die 1. Ableitung der Konchoidengleichung	9
2.3.5.2. Senkrechte Tangenten	10
2.3.5.3. Waagrechte Tangenten	10
2.3.6. Die Steigung in $x_1=0$	11
2.3.7. Wendepunkte	12
2.4. Die Graphen der Konchoide	13
2.5. Konstruktion der Konchoide	16
 <u>3. Konchoiden eines Kreises</u>	 17
3.1. Beschreibung und Bezeichnungen	17
3.2. Gleichung der Konchoide	18
3.3. Kurvendiskussion der Konchoide	21
3.3.1. Sonderfälle	21
3.3.2. Nullstellen	22
3.3.3. Symmetrieverhalten	22
3.3.4. Bestimmung der Tangenten	22
3.3.4.1. Die 1. Ableitung von f_1-f_2	22
3.3.4.2. Senkrechte Tangenten	23
3.3.4.3. Waagrechte Tangenten und die Graphen der Konchoide	23
3.3.5. Wendepunkte	26
3.4. Konstruktion der Konchoide	27
 <u>4. BASIC-Programm zum Zeichnen von Konchoiden von Funktionen</u>	 27
4.1. Wirkung und Arbeitsweise	27
4.2. Besonderheiten	28
4.3. Struktogramm	28
4.3. BASIC-Programm	29

<u>5. Verwendung der Konchoide bei nicht elementar lösbaren Problemen</u>	32
5.1. Verwendung der Konchoide des Nikomedes zur Würfelverdoppelung	32
5.2. Verwendung der Konchoide zur Winkeldrittung	33
5.2.1. Mit Hilfe der Konchoide des Nikomedes	33
5.2.2. Mit Hilfe der Pascal'schen Schnecke	35
 <u>6. Literaturverzeichnis</u>	 36

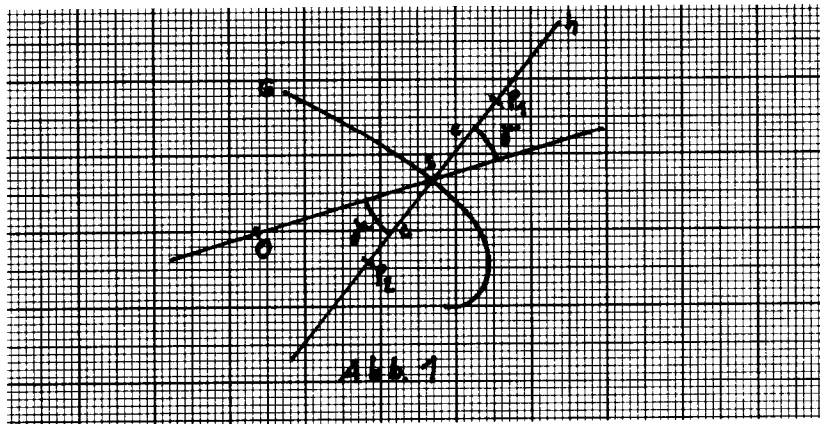
1. Definition der Konchoide

1.1. Zur Wahl der Definition

Die Formulierung meiner Definition ist angelehnt an die von Schmidt (<2>, S.102), wobei ich diese um einen Winkelparameter erweitert habe, wegen einer allgemeingültigeren Handhabung des Begriffes 'Konchoide' von Wieleitner (<1>, S.64). Ferner habe ich die Parameterbezeichnungen selbst gewählt.

1.2. Definition:

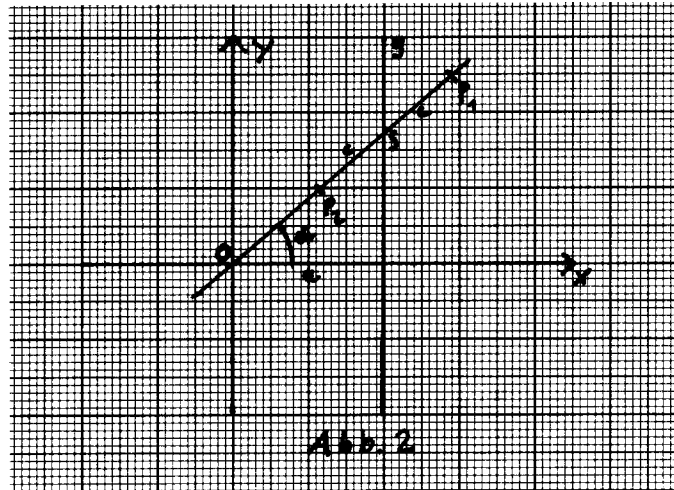
Unter Konchoiden im allgemeineren Sinne versteht man Kurven, die auf folgende Weise entstehen: G sei eine ebene Kurve und O ein Punkt in ihrer Ebene. Man lege durch O und einen Punkt S der Kurve G eine Gerade OS und ziehe durch S unter einem bestimmten Winkel γ eine weitere Gerade h . An dieser Geraden h trage man von S aus nach entgegengesetzten Richtungen $\overline{P_1S} = \overline{SP_2} = c$ ab. Der geometrische Ort der Punkte P bei Drehung der Geraden OS um O ist dann eine Konchoide (s. Abb.1).



2. Konchoiden einer Geraden

2.1. Beschreibung und Bezeichnungen

Die ebene Kurve G sei nun eine Gerade g . Da sich die Konchoidenkonstruktion nur auf die gegenseitige Lage des Punktes O und der Geraden g bezieht, kann man diese ohne Beschränkung der Allgemeinheit so in ein kartesisches Koordinatensystem legen, daß O der Ursprung und g eine Parallele zur y -Achse im positiven x -Bereich ist. Die gegenseitige Lage ist eindeutig durch den Abstand a bestimmt (s. Abb.2).



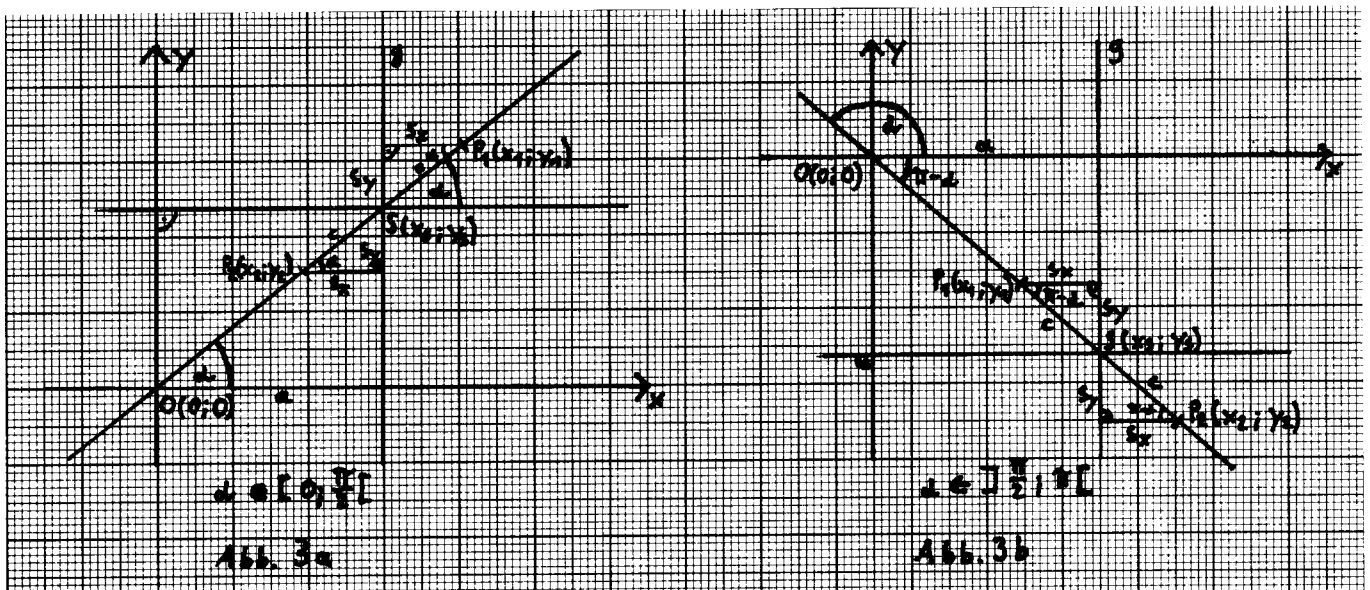
Der Winkel zwischen der Geraden OS und der x-Achse wird α bezeichnet. Dieser Winkel kann die Werte $[0; \pi]$ annehmen, da für $\alpha = \pi$ die selbe Gerade OS bestimmt wird, wie für $\alpha = 0$. α muß aber ungleich $\pi/2$ sein, da dafür kein Schnittpunkt S existiert. Da a und c Streckenlängen bezeichnen, wähle ich sie größer als Null. Für $a=0$ wäre eine Konchoidenkonstruktion nicht sinnvoll, und für $c=0$ wäre allgemein die Konchoide von einer Kurve die Kurve selbst. Als Vereinfachung möchte ich noch $r=0$ einführen, womit man eine sogenannte 'gerade' Konchoide oder 'Konchoide des Nikomedes' erhält. Als Einschränkung der Parameter erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} \alpha &\in [0; \pi] \setminus \{\pi/2\} \\ a &> 0 \\ c &> 0 \\ r &= 0 \end{aligned}$$

2.2. Gleichungen der Konchoide

2.2.1. Mit Hilfe von trigonometrischen Funktionen

Zur Veranschaulichung der folgenden Rechnungen dienen die Abbildungen 3a und 3b:



Um eine Gleichung für die Konchoide zu erhalten, muß man y_1 und y_2 jeweils in Abhängigkeit von x_1 bzw. x_2 ausdrücken. Zunächst will ich aber x_1 , x_2 , y_1 und y_2 in Abhängigkeit von d ausdrücken. Man erkennt:

a) aus Abb.3a:

$$x_1 = x_3 + s_x = a + c \cdot \cos d$$

$$I) \quad y_1 = y_3 + s_y = a \cdot \tan d + c \cdot \sin d$$

$$x_2 = x_3 - s_x = a - c \cdot \cos d$$

$$y_2 = y_3 - s_y = a \cdot \tan d - c \cdot \sin d$$

b) aus Abb.3b:

$$x_1 = x_3 - s_x = a - c \cdot \cos(\pi - d) = a + c \cdot \cos d$$

$$y_1 = y_3 + s_y = a \cdot \tan d + c \cdot \sin(\pi - d) = a \cdot \tan d + c \cdot \sin d$$

$$x_2 = x_3 + s_x = a + c \cdot \cos(\pi - d) = a - c \cdot \cos d$$

$$y_2 = y_3 - s_y = a \cdot \tan d - c \cdot \sin(\pi - d) = a \cdot \tan d - c \cdot \sin d$$

Somit erhält man für die Punkte P in Abhängigkeit von $d \in [0; \pi \setminus \{\pi/2\}]$:

$$P_1(a+c \cdot \cos d; a \cdot \tan d + c \cdot \sin d)$$

$$P_2(a-c \cdot \cos d; a \cdot \tan d - c \cdot \sin d)$$

Nun muß der Parameter d eliminiert werden:

$$x_1 = a + c \cdot \cos d$$

$$\cos d = \frac{x_1 - a}{c} \quad ; \text{ da } c \neq 0; \text{ nur lösbar für } \left| \frac{x_1 - a}{c} \right| \leq 1$$

$$d = \arccos \frac{x_1 - a}{c} \quad ; \text{ da } d \in [0; \pi \setminus \{\pi/2\}]$$

$$d \text{ eingesetzt in I):} \quad y_1 = a \cdot \tan(\arccos \frac{x_1 - a}{c}) + c \cdot \sin(\arccos \frac{x_1 - a}{c})$$

$$\text{Analog gilt für alle Punkte } P_2: \quad y_2 = a \cdot \tan(\arccos \frac{a - x_2}{c}) - c \cdot \sin(\arccos \frac{a - x_2}{c})$$

Für die Definitionsmengen gilt:

Aus $x_1 = a + c \cdot \cos d$ und $d \in [0; \pi \setminus \{\pi/2\}]$, d. h. $\cos d \neq 0$, folgt: $x_1 \neq a$
Analog: $x_2 \neq a$

Für $\left| \frac{x_1 - a}{c} \right| \leq 1$ ergeben sich zusätzlich folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall: } x_1 > a: \quad & \frac{x_1 - a}{c} \leq 1 \\ & x_1 - a \leq c \quad ; \text{ da } c > 0 \\ & x_1 \leq a + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Fall: } x_1 < a: \quad & \frac{x_1 - a}{c} > -1 \quad ; \text{ da } \frac{x_1 - a}{c} \neq -1 \quad (d \neq \pi) \\ & x_1 - a > -c \quad ; \text{ da } c > 0 \\ & x_1 > a - c \end{aligned}$$

$$x_1 \in]a-c; a+c[\setminus \{a\}$$

$$\text{Analog gilt für } x_2: \quad x_2 \in]a-c; a+c[\setminus \{a\}$$

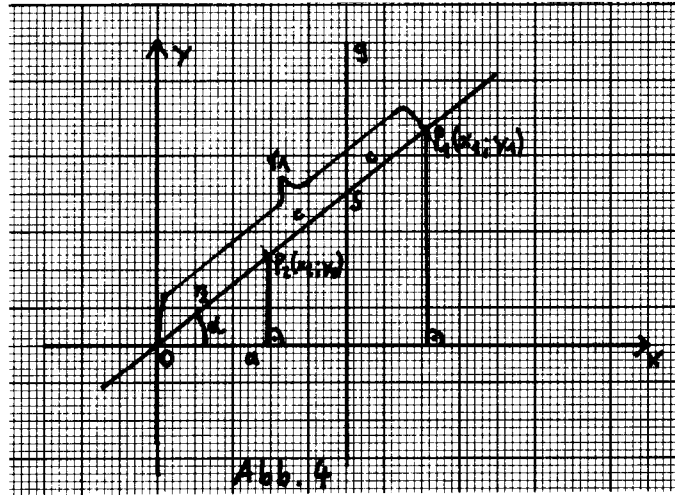
Somit erhalten wir das erste Funktionsgleichungspaar, das zusammen die Konchoide bestimmt:

$$f_1: x \mapsto a \cdot \tan(\arccos \frac{x-a}{c}) + c \cdot \sin(\arccos \frac{x-a}{c}); \quad D_{f_1} =]a-c; a+c[\setminus \{a\}$$

$$f_2: x \mapsto a \cdot \tan(\arccos \frac{a-x}{c}) - c \cdot \sin(\arccos \frac{a-x}{c}); \quad D_{f_2} =]a-c; a+c[\setminus \{a\}$$

2.2.2. Als Gleichung 4. Ordnung

Zur Veranschaulichung der folgenden Rechnung, die sich auf Berechnungen von Schmidt (<2>, S.103) stützt, dient Abbildung 4:



Man führt nun r als Verbindungsstrecke zwischen O und den Punkten P der Konchoide ein. Also gilt: $r = \overline{OP}$

Somit gilt für P_1 : $r = \overline{OS} + c$ mit $a = \overline{OS} \cdot \cos \alpha \Rightarrow \overline{OS} = \frac{a}{\cos \alpha}$

$$r = \frac{a}{\cos \alpha} + c \Rightarrow \left(r - \frac{a}{\cos \alpha}\right) - c = 0$$

und analog für P_2 : $r = \frac{a}{\cos \alpha} - c \Rightarrow \left(r - \frac{a}{\cos \alpha}\right) + c = 0$

Für die Punkte P gilt dann:

$$\left[\left(r - \frac{a}{\cos \alpha}\right) - c\right] \cdot \left[\left(r - \frac{a}{\cos \alpha}\right) + c\right] = 0$$

$$\left(r - \frac{a}{\cos \alpha}\right)^2 = c^2$$

Man erkennt aus der Abbildung 4:

$$x = r \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Jetzt ergibt sich: $\left(r - \frac{ra}{x}\right)^2 = c^2$

und nach Ausmultiplizieren: $r^2 - 2 \frac{r^2 a}{x} + \frac{r^2 a^2}{x^2} = c^2$

Klammert man nun r^2 aus und setzt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ erhält man:

$$r^2 \left(1 - 2 \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) = c^2$$

$$(x^2 + y^2) \cdot \left(1 - 2 \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}\right) = c^2$$

Multipliziert man mit x^2 erhält man als Faktor eine binomische Formel:

$$(x^2 + y^2) \cdot (x^2 - 2ax + a^2) = c^2 x^2$$

$$(x^2 + y^2) \cdot (x - a)^2 = c^2 x^2$$

Dieses ist die übliche, in der Literatur verwendete Konchoidengleichung. Ich will sie aber nun noch in zwei Funktionen aufspalten. Dazu dient folgende Rechnung:

$$(x^2 + y^2)(x-a)^2 = c^2 x^2$$

$$x^2(x-a)^2 + y^2(x-a)^2 = c^2 x^2$$

$$y^2(x-a)^2 = c^2 x^2 - x^2(x-a)^2$$

1. Fall: $x=a$: Es ergibt sich: $0=c^2 a^2$

Da aber $c>0$ und $a>0$, ist diese Aussage falsch.

2. Fall: $x \neq a$:

$$y^2 = \frac{x^2[c^2 - (x-a)^2]}{(x-a)^2}$$

Nur lösbar für $c^2 \geq (x-a)^2$: $|x-a| \leq c$

$$x \leq a+c, \text{ für } x > a$$

$$x \geq a-c, \text{ für } x < a$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{x^2[c^2 - (x-a)^2]}{(x-a)^2}} = \pm \left| \frac{x}{x-a} \right| \sqrt{c^2 - (x-a)^2}$$

Damit erhalten wir das zweite Funktionsgleichungspaar der Konchoide:

$$f_1^{\pm}: x \mapsto \left| \frac{x}{x-a} \right| \sqrt{c^2 - (x-a)^2}; \quad D = [a-c; a+c] \setminus \{a\}$$

$$f_2^{\pm}: x \mapsto \left| \frac{x}{x-a} \right| \sqrt{c^2 - (x-a)^2}; \quad D = [a-c; a+c] \setminus \{a\}$$

2.3. Kurvendiskussion der Konchoide

2.3.1. Sonderfälle

Hier möchte ich nun kurz die Wirkung beschreiben, falls für c und a auch negative Werte und die Null zugelassen werden.

- $c < 0$: Betrachtet man die Formel $(x^2 + y^2)(x-a)^2 = c^2 x^2$, so fällt auf, daß c nur im Quadrat vorkommt. Auch auf die Definitionsmenge wirkt sich das negative c nicht aus. Es werden lediglich die Grenzen vertauscht. Es ergibt sich die selbe Konchoide wie für ein $c^* > 0$, wenn $c^* = |c|$.
- $c = 0$: Hierbei ergeben sich für die Konchoidenpunkte P in Abhängigkeit von α : $P(a; a \cdot \tan \alpha)$
Die Menge dieser Punkte P beschreibt die Gerade g , wie schon in Kapitel 2.1. angeschnitten wurde.
- $a < 0$: Die Gerade g liegt nun im negativen x -Bereich, und sie ist das an der y -Achse gespiegelte Bild einer Geraden im positiven x -Bereich mit dem Abstand $|a|$ von der y -Achse. Da die Erzeugungsweise der Konchoide die selbe bleibt, ist auch die Konchoide für $a < 0$ das an der y -Achse gespiegelte Bild der Konchoide für $a^* = |a|$.

- d) $a=0$: Hierbei ergeben sich für die Konchoidenpunkte P in Abhängigkeit von α :
- $$P_1(c \cdot \cos \alpha; c \cdot \sin \alpha)$$
- $$P_2(-c \cdot \cos \alpha; -c \cdot \sin \alpha)$$
- Die Menge dieser Punkte P beschreibt einen Kreis um 0 mit dem Radius c, wobei die Punkte $P_1(0;c)$ und $P_2(0;-c)$ ausgeschlossen werden, da $\alpha \in [0; \pi] \setminus \{\pi/2\}$.

Die folgenden Kapitel setzen wieder $c > 0$ und $a > 0$ voraus.

2.3.2. Verhalten der Konchoide bei $x=a$

$$\lim_{x \rightarrow a} f_1^*(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{x}{x-a} \sqrt{c^2 - (x-a)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{a \cdot c}{x-a} \right| \rightarrow +\infty$$

Analog: $\lim_{x \rightarrow a} f_2^*(x) = \lim_{x \rightarrow a} - \left| \frac{a \cdot c}{x-a} \right| \rightarrow -\infty$

Aus dieser Rechnung folgt, daß bei $x=a$ eine senkrechte Asymptote existiert.

2.3.3. Nullstellen

Hier gehen wir von der umgeformten Konchoidengleichung aus:

$$y^2 = \frac{x^2 [c^2 - (x-a)^2]}{(x-a)^2}$$

Als Bedingung für die Nullstellen erhalten wir dann: $x^2 [c^2 - (x-a)^2] = 0$

1. Fall: $x_1 = 0$, für $a-c \leq 0$
d. h. $a \leq c$, da sonst $x_1 \notin \mathbb{D}$
2. Fall: $c^2 - (x-a)^2 = 0$
 $x-a = \pm c$
 $x_{2,3} = a \pm c$
 $x_2 = a+c$; $x_3 = a-c$

Die Konchoide besitzt demnach Nullstellen bei $x_1 = a+c$, $x_3 = a-c$ und für $a \leq c$ bei $x_1 = 0$.

2.3.4. Symmetrieverhalten

Aus $f_1^*(x) = -f_2^*(x)$ für alle $x \in \mathbb{D}$ folgt, daß der Graph der Konchoide symmetrisch zur x-Achse ist.

2.3.5. Bestimmung der Tangenten

2.3.5.1. Die 1. Ableitung der Konchoidengleichung

$$(x^2 + y^2)(x-a)^2 = c^2 x^2$$

nach x abgeleitet: $(2x + 2yy')(x-a)^2 + (x^2+y^2) \cdot 2(x-a) = 2c^2x$

$$\begin{aligned} 2x(x-a)^2 + 2yy'(x-a)^2 + 2(x^2+y^2)(x-a) &= 2c^2x \quad | \cdot \left(\frac{x-a}{2}\right) \\ x(x-a)^3 + yy'(x-a)^3 + (x^2+y^2)(x-a)^2 &= c^2x(x-a) \end{aligned}$$

mit $(x^2+y^2)(x-a)^2 = c^2x^2$:

$$\begin{aligned} x(x-a)^3 + yy'(x-a)^3 + c^2x^2 &= c^2x^2 - ac^2x \quad | - c^2x^2 \\ yy'(x-a)^3 &= -x[ac^2 + (x-a)^3] \\ y' &= \frac{-x[ac^2 + (x-a)^3]}{y(x-a)^3} \quad ; \text{ mit } y \neq 0 \text{ und } x \neq a \end{aligned}$$

2.3.5.2. Senkrechte Tangenten

Senkrechte Tangenten kann es nur dort geben, wo der Nenner der 1. Ableitung Null wird, und wo die Konchoidengleichung definiert ist. Dies ist nur an den Nullstellen der Konchoidengleichung der Fall. Wenn der Zähler der 1. Ableitung an diesen Stellen ungleich Null ist, so sind an diesen Stellen senkrechte Tangenten.

1. Fall: $x_1=0$ für $c > a$:

Der Zähler der 1. Ableitung wird Null, da:
 $-x[ac^2 + (x-a)^3] = 0$ für $x=0$,
 d.h. dort ist keine senkrechte Tangente.

2. Fall: $x_2=a+c$:

$-(a+c)[ac^2 + (a+c-a)^3] = -(a+c)(ac^2 + c^3) < 0$, da $a > 0$, $c > 0$
 d.h. bei $x_2=a+c$ existiert eine senkrechte Tangente.

3. Fall: $x_3=a-c$:

$-(a-c)[ac^2 + (a-c-a)^3] = -(a-c)(ac^2 - c^3) = -c^2(a-c)^2$
 $-c^2 < 0$. Nur für $(a-c)^2 = 0$ gibt es bei $x_3=a-c$ keine senkrechte Tangente. $(a-c)^2 = 0$
 $a=c$

d.h. es existiert für $a \neq c$ bei $x_3=a-c$ eine senkrechte Tangente.

2.3.5.3. Waagrechte Tangenten

Waagrechte Tangenten gibt es dort, wo der Zähler der 1. Ableitung Null, und der Nenner ungleich Null ist. Außerdem müssen natürlich die so berechneten $x_i \neq 0$ sein. Die Bedingung lautet:

$$-x[ac^2 + (x-a)^3] = 0$$

1. Fall: $x_1=0$ für $c > a$:

Hier ist auch der Nenner Null, wie wir schon in Kapitel 2.3.5.2. gesehen haben.

2. Fall: $ac^2 + (x-a)^3 = 0$

$$(x-a)^3 = -ac^2$$

$$\text{da } -ac^2 < 0: \quad x-a = -\sqrt[3]{ac^2}$$

$$x_1 = a - \sqrt[3]{ac^2}$$

Damit $x_1 \neq 0$ muß gelten: $a - \sqrt[3]{ac^2} \neq 0$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{ac^2} &\neq a \\ ac^2 &\neq a^3 \quad | :c^2 \quad (c > 0) \\ a &\neq c \end{aligned}$$

Für $a=c$ wäre $x_1=0$, d.h. der Nenner wäre Null (siehe 1. Fall). Diese Stelle wird später noch genauer untersucht.

Da die Konchoide eine zur x-Achse symmetrische Relation ist, und die Relationswerte für $x_1 = a - \sqrt[3]{ac^2}$ ungleich Null sind, muß

es bei $x_1 = a - \sqrt{ac^2}$ für $a < c$ zwei waagrechte Tangenten geben.

Jetzt wollen wir noch untersuchen, ob es sich um Minima, Maxima oder Terrassenpunkte handelt. Dazu untersuchen wir das Verhalten der 1. Ableitung in der Umgebung um x_1 .

Für $a < c$ gilt $x_1 = a - \sqrt{ac^2} < 0$, d.h. $-x_1 > 0$.

Daraus folgt für den Zähler der 1. Ableitung, daß beim Durchgang durch x_1 in positiver x-Richtung ein Vorzeichenwechsel von "-" nach "+" stattfindet. Der Nenner der 1. Ableitung von f_1^* ist negativ, da $(x_1 - a)^3 < 0$ ist. Es findet also bei der 1. Ableitung von f_1^* ein Vorzeichenwechsel von "+" nach "-" bei $x_1 = a - \sqrt{ac^2}$ für $a < c$ statt, d.h. dort ist ein Maximum. Der Nenner der 1. Ableitung von f_2^* ist positiv. Die Überlegungen führen analog zu einem Minimum.

2.3.6. Die Steigung in $x_1 = 0$

Damit die Konchoide bei $x_1 = 0$ überhaupt definiert ist, muß $a \leq c$ sein. Dort ist dann, wie in Kapitel 2.3.3. festgestellt wurde, eine Nullstelle. Zunächst wird die 1. Ableitung des ersten Funktionsgleichungspaares berechnet. Dazu verwende ich die Formeln aus der Formelsammlung (<3>, S.62):

$$f_1(x) = a \cdot \tan(\arccos \frac{x-a}{c}) + c \cdot \sin(\arccos \frac{x-a}{c})$$

$$f_1'(x) = -a \cdot \frac{1}{[\cos(\arccos \frac{x-a}{c})]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c} - c \cdot \cos(\arccos \frac{x-a}{c}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{c}$$

$$f_1'(x) = - \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{c^2}}} \cdot \left[\frac{a \cdot c^2}{(x-a)^2} + (x-a) \right]$$

Für $x=0$ gilt:
($c > a$)

$$f_1'(0) = - \frac{1}{c \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}} \cdot \left(\frac{ac^2}{a^2} - a \right) = - \frac{1}{\sqrt{c^2 - a^2}} \cdot \frac{c^2 - a^2}{a} =$$

$$= - \frac{\sqrt{(c^2 - a^2)^2}}{(c^2 - a^2) \cdot a} = - \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = - \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$$

Wegen der Symmetrie zur x-Achse gilt für $f_2'(0)$:
($c > a$)

$$f_2'(0) = \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$$

Für $c > a$ ist bei $x_1 = 0$ ein doppelter Nulldurchgang mit den Steigungen $\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$ und $-\sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}$.

Für $c = a$ gilt: $f_1'(0) = 0$ und

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_1'(x) = 0,$$

d.h. für $c = a$ ist eine waagrechte Tangente bei $x_1 = 0$.

2.3.7. Wendepunkte

Um die Wendepunkte berechnen zu können, braucht man die 2. Ableitung. Dieser Term wird jedoch -allgemein gerechnet- ziemlich lang, und man erhält am Ende der Rechnungen eine Gleichung 6. Grades, die auch durch Näherungsverfahren nur sehr schwer zu lösen ist. Diese Gleichung lautet folgendermaßen (Berechnung ähnlich wie unten):

$$x^6 - 3ax^5 + x^3(10a^3 - ac^2) + x^2(6a^2c^2 - 15a^4) + x(9a^5 - 9a^3c^2) + 4a^4c^2 - 2a^2c^4 - 2a^6 = 0$$

Einzig für den Spezialfall $c=a$ läßt sich Genaueres angeben.

Die 1. Ableitung lautet dann:

$$f_1'(x) = - \frac{1}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}} \cdot \frac{a^3 + (x-a)^3}{(x-a)^2} = - \sqrt{\frac{[a^3 + (x-a)^3]^2}{[a^2 - (x-a)^2](x-a)^4}}$$

$$f_1'(x) = - \sqrt{\frac{a^6 + 2a^3(x-a)^3 + (x-a)^6}{a^2(x-a)^4 - (x-a)^6}}$$

Und die 2. Ableitung:

$$f_1''(x) = - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{[a^2 - (x-a)^2](x-a)^4}{[a^3 + (x-a)^3]^2}} \cdot \frac{[6a^3(x-a)^2 + 6(x-a)^5] \cdot [a^2(x-a)^4 - (x-a)^6] - [a^6 + 2a^3(x-a)^3 + (x-a)^6] \cdot [4a^2(x-a)^3 - 6(x-a)^5]}{[a^2 - (x-a)^2]^2 (x-a)^8} \dots$$

Eine Bedingung für Wendepunkte ist, daß die 2. Ableitung Null ist. $f_1''(x)$ ist dann Null, wenn der Zähler des Bruchs außerhalb der Wurzel Null ist, da der Zähler des Bruchs in der Wurzel auch als Nenner des Bruchs außerhalb der Wurzel vorkommt, also nicht Null werden darf. Bei der nächsten Rechnung ist der erstgenannte Zähler bereits durch $(x-a)^3$ geteilt:

$$[6a^3(x-a)^2 + 6(x-a)^5] \cdot [a^2(x-a)^4 - (x-a)^6] - [a^6 + 2a^3(x-a)^3 + (x-a)^6] \cdot [4a^2(x-a)^3 - 6(x-a)^5] = 0$$

$$6a^5(x-a)^3 - 6a^3(x-a)^5 + 6a^2(x-a)^6 - 6(x-a)^8 - 4a^8 + 6a^6(x-a)^2 - 8a^5(x-a)^3 + 12a^3(x-a)^5 - 4a^2(x-a)^6 + 6(x-a)^8 = 0$$

$$2a^2(x-a)^6 + 6a^3(x-a)^5 - 2a^5(x-a)^3 + 6a^6(x-a)^2 - 4a^8 = 0 \quad | : 2a^2 \quad (a > 0)$$

$$(x-a)^6 + 3a(x-a)^5 - a^3(x-a)^3 + 3a^4(x-a)^2 - 2a^6 = 0$$

$$x^6 - 6ax^5 + 15a^2x^4 - 20a^3x^3 + 15a^4x^2 - 6a^5x + a^6 + 3ax^5 - 15a^2x^4 + 30a^3x^3 - 30a^4x^2 + 15a^5x - 3a^6 - a^3x^3 + 3a^4x^2 - 3a^5x + a^6 + 3a^4x^2 - 6a^5x + 3a^6 - 2a^6 = 0$$

$$x^6 - 3ax^5 + 9a^3x^3 - 9a^4x^2 = 0$$

$| : x^2$; $x \neq 0$, da an der Definitionsgrenze kein Wendepunkt existieren kann.

$$x^4 - 3ax^3 + 9a^3x - 9a^4 = 0$$

Die Lösung dieser Gleichung muß die Form $x=k \cdot a$ haben, wobei k eine Konstante ist. Setzt man für $x=k \cdot a$ ein, erhält man:

$$\begin{aligned} k^4 - 3k^3 + 9k - 9 &= 0 & |:a^4 \quad (a > 0) \\ k^4 - 3k^3 + 9k - 9 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichung läßt sich mit dem Newton'schen Näherungsverfahren unter Anwendung der Funktionen $g(k) = k^4 - 3k^3 + 9k - 9$ und $g'(k) = 4k^3 - 9k^2 + 9$ lösen (<3>, S.20). Man erhält dabei zwei Werte: $k_1 = \sqrt{3}$; $k_2 = -\sqrt{3}$. Das ergäbe die Lösungen: $x_1 = \sqrt{3}a$; $x_2 = -\sqrt{3}a$. Da aber $x \in [0; 2a] \setminus \{a\}$ gilt, ist nur x_1 eine Lösung, da $x_2 < 0$. Dies ist nun tatsächlich ein Wendepunkt, da bei $x=a$ eine senkrechte Asymptote, bei $x=2a$ eine senkrechte Tangente und eine Nullstelle ist und sich dazwischen keine weitere Nullstelle befindet. In diesem Bereich muß sich bei einer stetigen und differenzierbaren Funktion, wie sie f_1 hier ist, mindestens einmal die Krümmung ändern. Wegen der Achsensymmetrie, und da x_1 keine Nullstelle ist, besitzt die Konchoide dort zwei Wendepunkte.

Die selben Überlegungen gelten auch für alle anderen Konchoiden im Bereich $[a; a+c]$ und für $a > c$ auch im Bereich $[a-c; a]$. Weitere Wendepunkte sind zur Erfüllung der besprochenen Eigenschaften nicht notwendig.

Auch die Praxis zeigt:

Für $a < c$ existieren 2 Wendepunkte.

Für $a = c$ existieren 2 Wendepunkte bei $W_1(\sqrt{3}a; \frac{1}{2}\sqrt{3}a^2)$ und $W_2(\sqrt{3}a; -\frac{1}{2}\sqrt{3}a^2)$.

Für $a > c$ existieren 4 Wendepunkte.

2.4. Die Graphen der Konchoide

In den Abbildungen 5a-f sieht man nun die drei Fälle von Geraden-Konchoiden, wobei jeweils f_1 und f_2 bzw. f_1^* und f_2^* eingezeichnet sind. Es ist dabei jeweils ein Repräsentant für $c < a$, $c = a$ und $c > a$ ausgewählt worden.

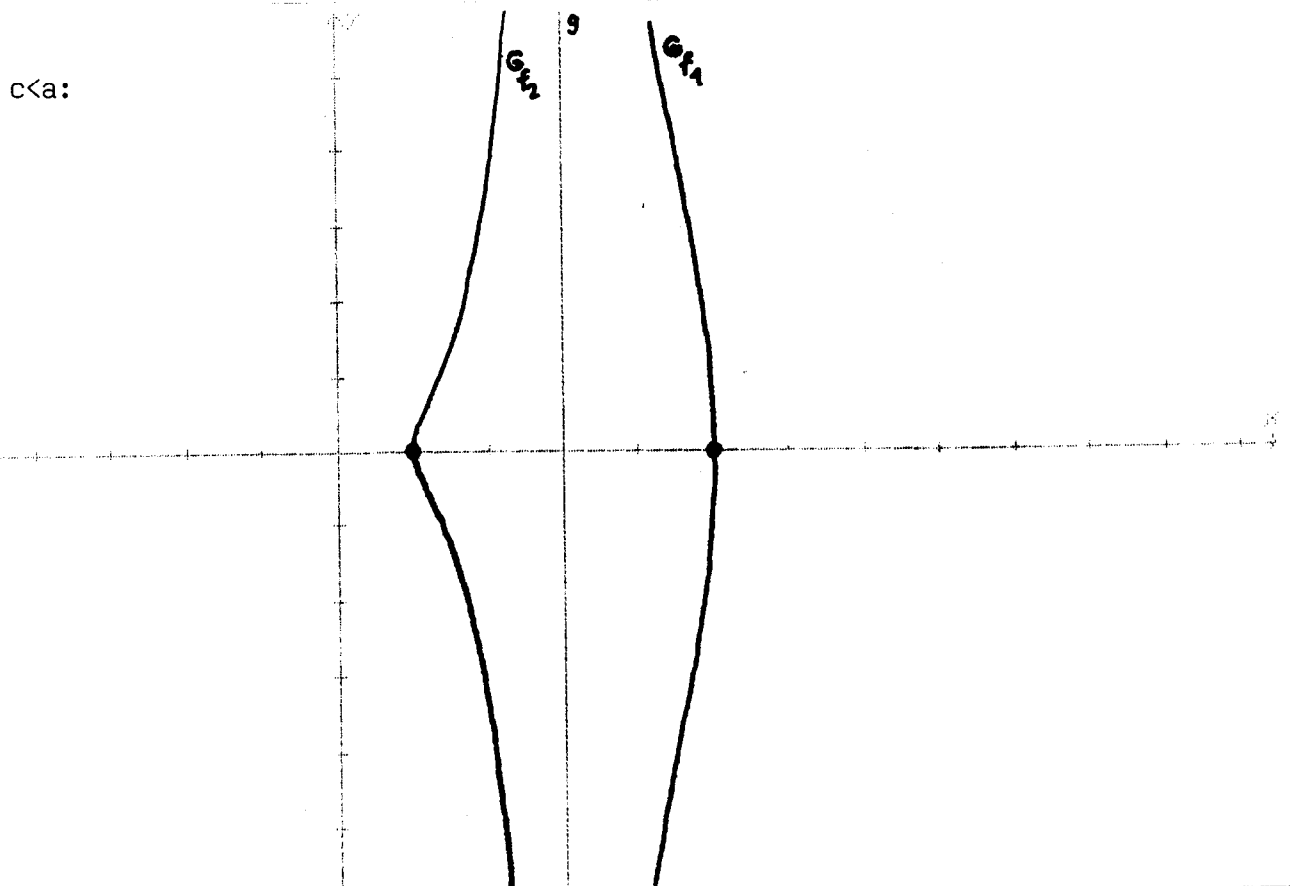


Abb. 5a

$c=a:$

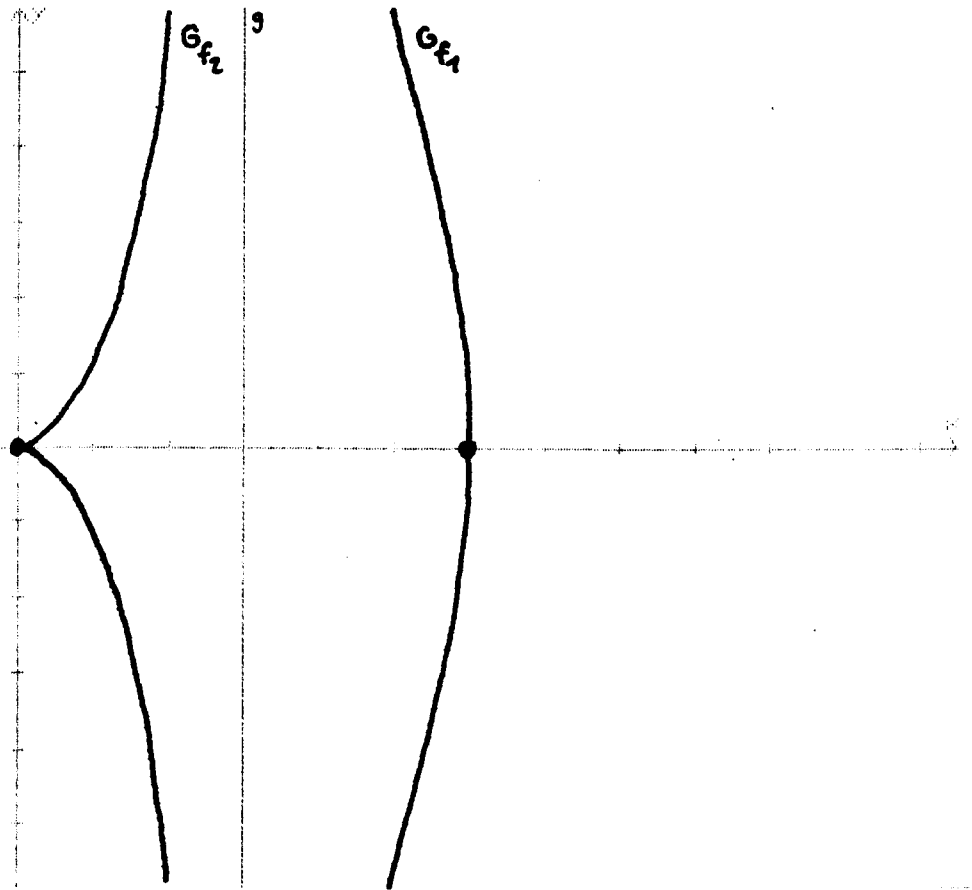


Abb. 5b

$c>a:$

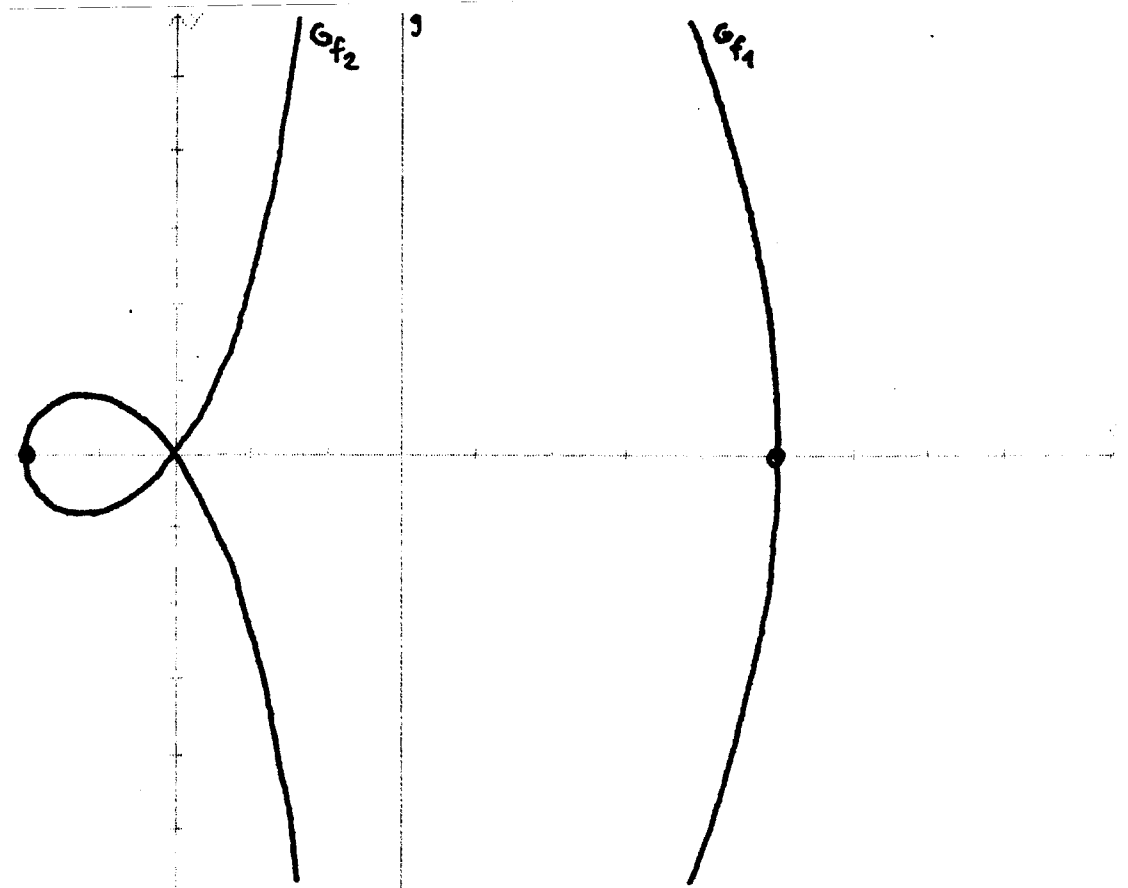


Abb. 5c

$c < a$:

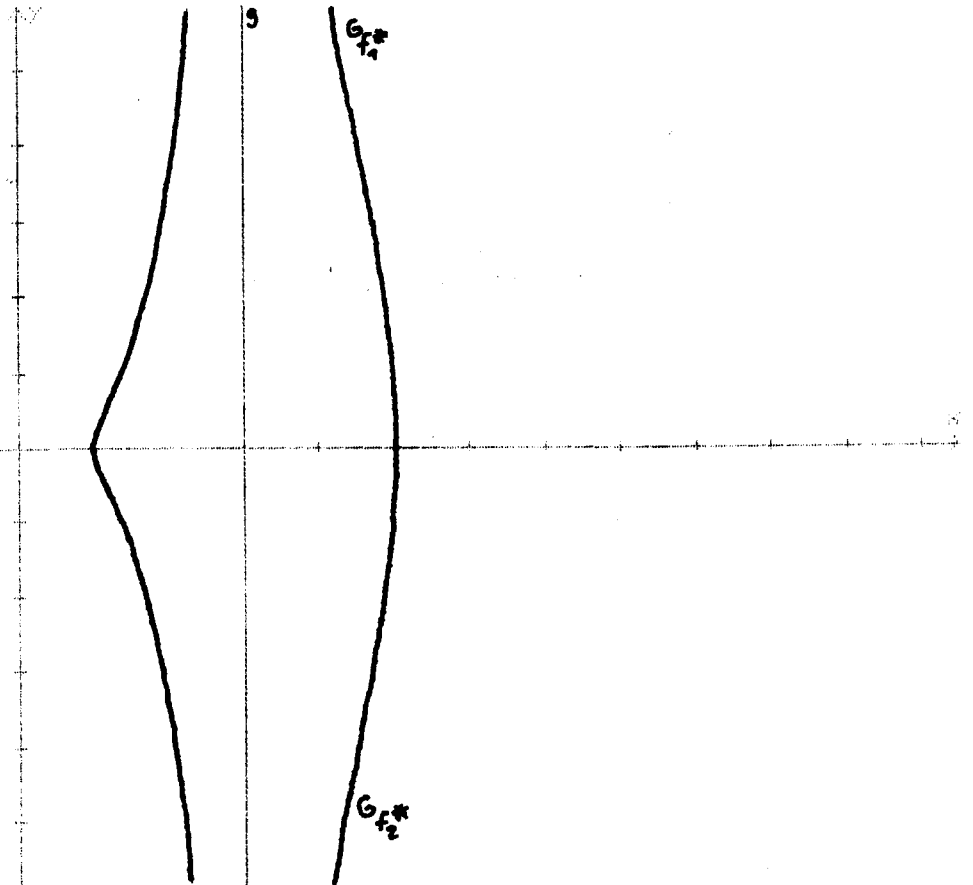


Abb. 5d

$c = a$:

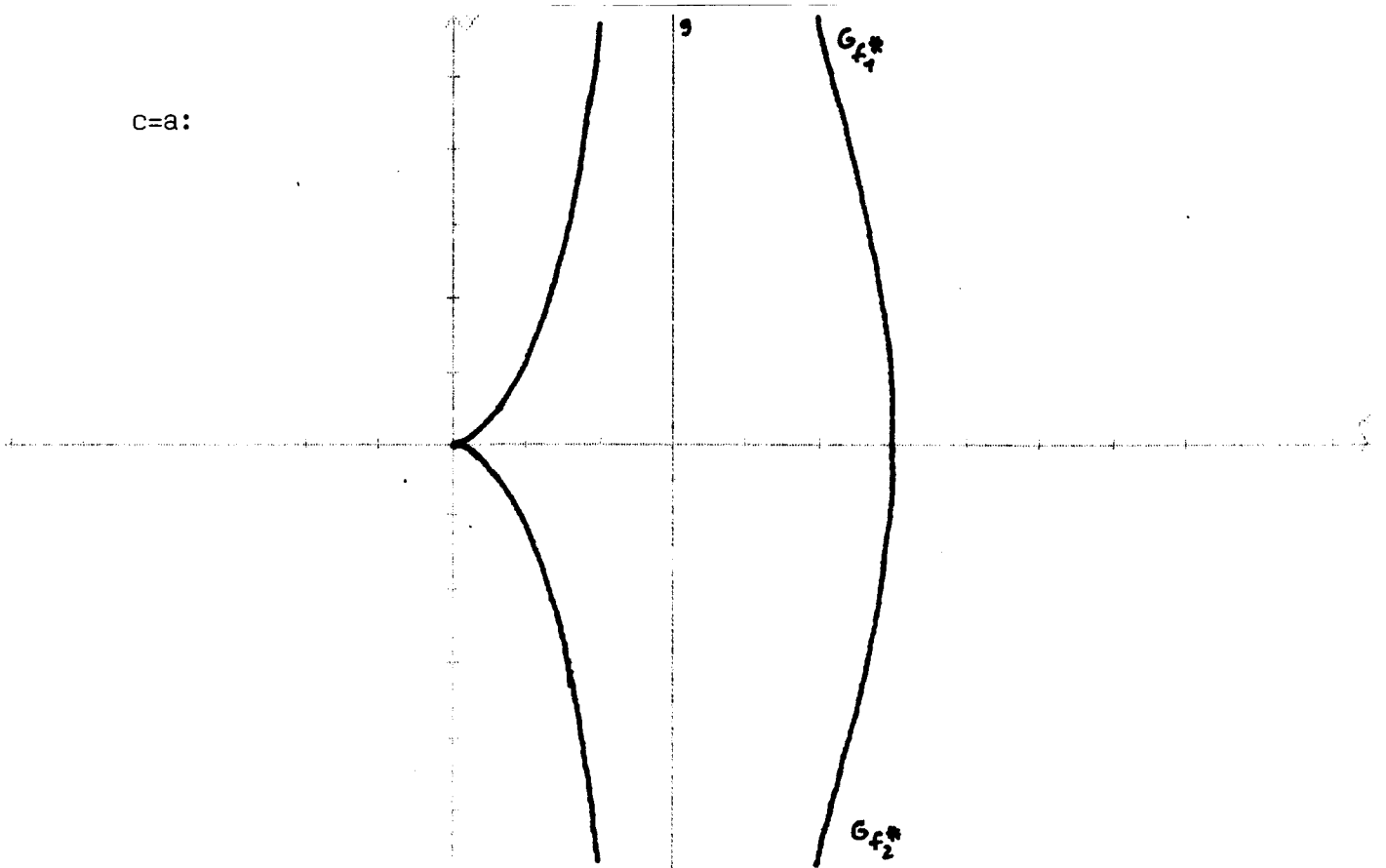


Abb. 5e

$c > a$:

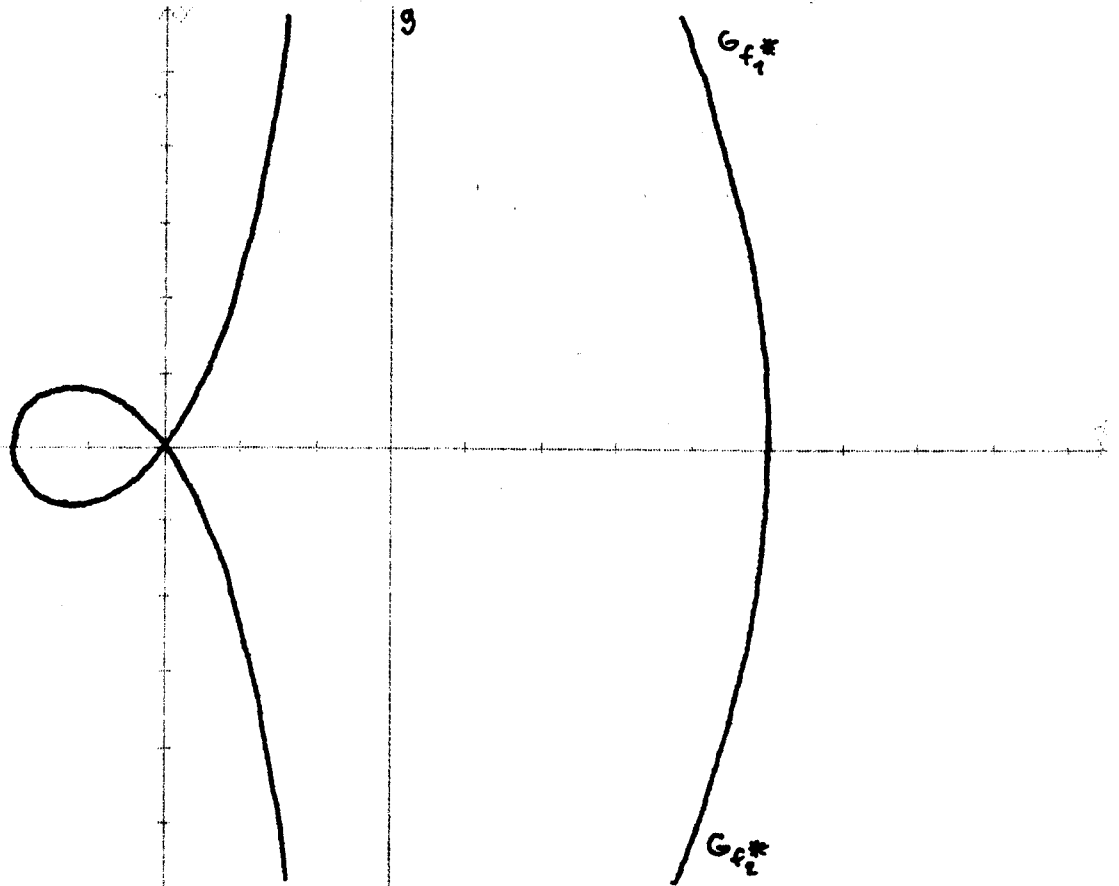
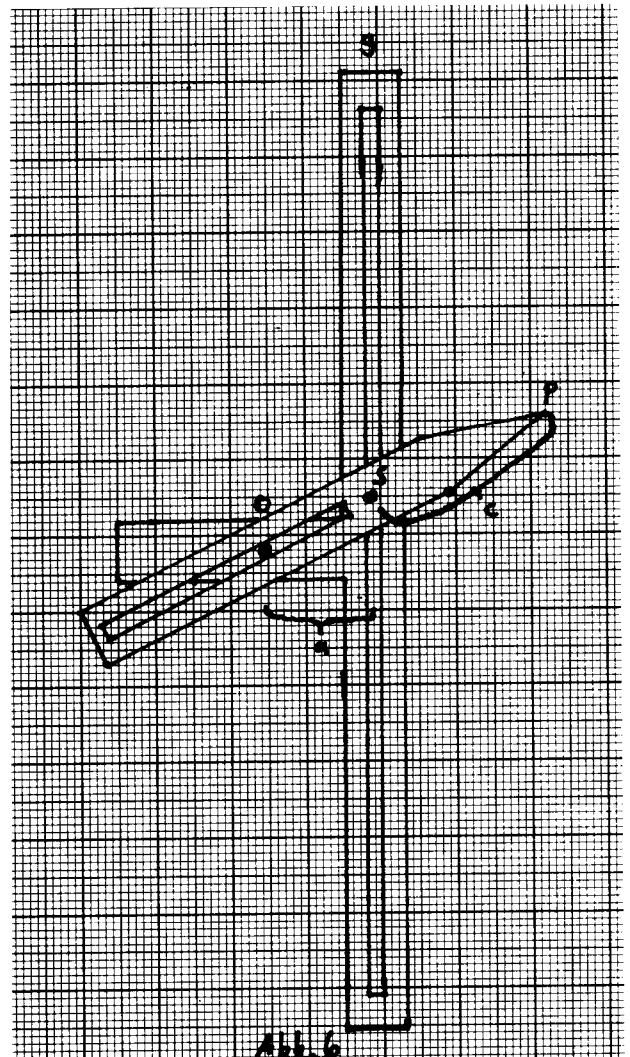


Abb.5f

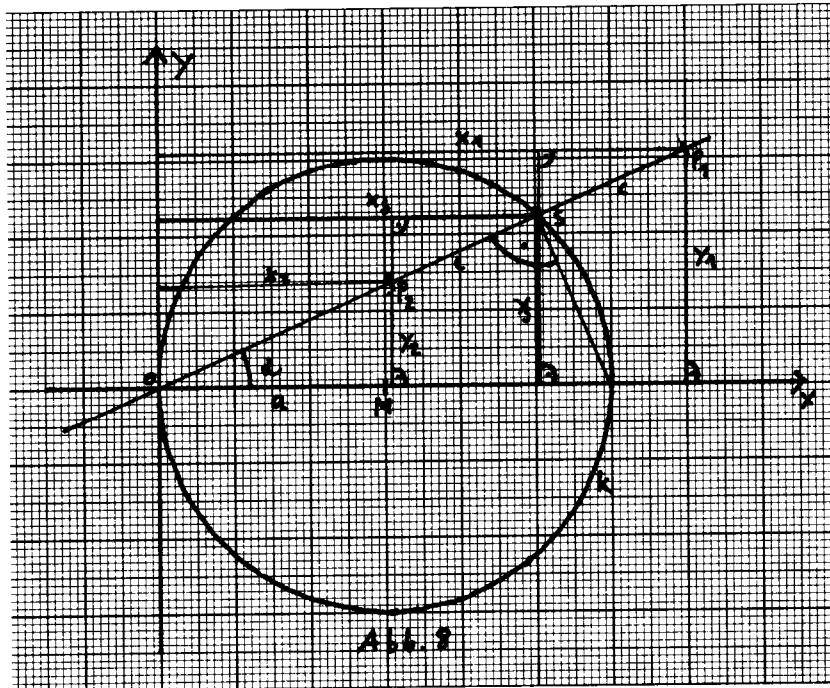
2.5. Konstruktion der Konchoide

Bei der Konstruktion der Konchoide behilft man sich mit einer mechanischen Vorrichtung, wie sie Schmidt (<2>, S.104f) beschreibt und die von Nikomedes erfunden wurde (s. Abb. 6). Dabei beschreibt aber die Spitze P nur den von O entfernten Konchoidenast, was aber für die unter Kapitel 5. angesprochenen Probleme ausreicht. Der Rest der Konchoide muß punktweise konstruiert werden.



3.2. Gleichungen der Konchoide

Zur Veranschaulichung der folgenden Rechnungen dient Abbildung 8:



Nach dem Gesetz von Thales gilt: $\overline{OS} = 2a \cdot \cos \alpha$

Nun wird die Strecke $R = \overline{OP}$ eingeführt. Somit gilt für P_1 : $R = \overline{OS} + c$
bzw.: $R = 2a \cdot \cos \alpha + c$
 $(R - 2a \cdot \cos \alpha) - c = 0$

und für P_2 : $R = \overline{OS} - c$
analog: $(R - 2a \cdot \cos \alpha) + c = 0$

Für beide Punkte gilt dann:

$$[(R - 2a \cdot \cos \alpha) - c] \cdot [(R - 2a \cdot \cos \alpha) + c] = 0$$

$$(R - 2a \cdot \cos \alpha)^2 - c^2 = 0$$

Aus Abbildung 8 erkennt man: $x = R \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{x}{R}$
Eingesetzt in die Gleichung erhält man:

$$\left(R - \frac{2ax}{R}\right)^2 - c^2 = 0$$

Und nach Multiplikation mit R^2 erhält man:

$$(R^2 - 2ax)^2 - c^2 R^2 = 0$$

Setzt man nun für $R = \sqrt{x^2 + y^2}$, wie aus Abbildung 8 zu erkennen ist, erhält man die allgemeine Konchoidengleichung, wie sie in der Literatur gebräuchlich ist:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - c^2(x^2 + y^2) = 0$$

Diese Gleichung möchte ich aber noch in Funktionen zerlegen. Dazu multipliziert man aus und erhält:

$$x^4 + x^2 y^2 - 2ax^3 + x^2 y^2 + y^4 - 2ax y^2 - 2ax^3 - 2ax y^2 + 4a^2 x^2 - c^2 x^2 - c^2 y^2 = 0$$

$$y^4 + y^2(2x^2 - 4ax - c^2) + (x^4 - 4ax^3 + 4a^2 x^2 - c^2 x^2) = 0$$

Diese Gleichung läßt sich unter Verwendung der Lösungsformel für quadratische Gleichungen lösen. Dazu bestimmen wir erst die Diskriminante D:

$$D = (2x^2 - 4ax - c^2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (x^4 - 4ax^3 + 4a^2 x^2 - c^2 x^2) =$$

$$= 4x^4 - 8ax^3 - 2c^2 x^2 - 8ax^3 + 16a^2 x^2 + 4ac^2 x - 2c^2 x^2 + 4ac^2 x + c^4 = 4x^4 +$$

$$16ax^3 - 16a^2 x^2 + 4c^2 x^2 =$$

$$= 8ac^2 x + c^4 = c^2(8ax + c^2)$$

Wenn nun $D \geq 0$, was später noch untersucht werden soll, kann man die Lösungsformel anschreiben:

$$y_{1,3}^2 = \frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) \pm c \cdot \sqrt{8ax + c^2}]$$

Nun muß noch die rechte Seite der Gleichung größer oder gleich Null sein, dann kann man die Wurzel ziehen. Man erhält vier Gleichungen:

$$y_1 = \sqrt{\frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) + c \cdot \sqrt{8ax + c^2}]}$$

$$y_2 = -\sqrt{\frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) + c \cdot \sqrt{8ax + c^2}]}$$

$$y_3 = \sqrt{\frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) - c \cdot \sqrt{8ax + c^2}]}$$

$$y_4 = -\sqrt{\frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) - c \cdot \sqrt{8ax + c^2}]}$$

Nun fehlen noch die Definitionsmengen. Dazu benötigen wir die vorher gestellten Bedingungen:

a)

$$c^2(8ax + c^2) \geq 0$$

$$8ax + c^2 \geq 0; \text{ da } c > 0$$

$$x \geq -\frac{c^2}{8a}; \text{ da } a > 0$$

Diese Bedingung gilt also unbedingt.

b)

$$\frac{1}{2} [(c^2 + 4ax - 2x^2) \pm c \cdot \sqrt{8ax + c^2}] \geq 0 \quad | \cdot 2$$

$$(*) \quad c^2 + 4ax - 2x^2 \geq \pm c \cdot \sqrt{8ax + c^2}$$

In dieser Gleichung ersetzen wir zunächst das Ungleichheitszeichen durch ein Gleichheitszeichen. Über die Intervalle stellen wir später Gedanken an.

$$c^2 + 4ax - 2x^2 = \pm c \cdot \sqrt{8ax + c^2} \quad |^2$$

$$(c^2 + 4ax - 2x^2)^2 = c^2(8ax + c^2)$$

$$c^4 + 4ac^2x - 2c^2x^2 + 4a^2c^2x + 16a^2x^2 - 8ax^3 - 2c^2x^2 - 8ac^2x - c^4 = 0$$

$$4x^4 - 16ax^3 + x^2(16a^2 - 4c^2) = 0 \quad |:4$$

$$x^4 - 4ax^3 + x^2(4a^2 - c^2) = 0$$

$$x^2(x^2 - 4ax + 4a^2 - c^2) = 0$$

1. Fall: $x=0$: Bei $x_1=0$ existiert eine doppelte Nullstelle, d.h. es findet dort kein Vorzeichenwechsel statt. Da es uns aber um das Vorzeichen geht, lassen wir $x_1=0$ zunächst unberücksichtigt.

2. Fall: $x \neq 0$:

$$x^2 - 4ax + (4a^2 - c^2) = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{4a}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{16a^2 - (16a^2 - 4c^2)}$$

$$x_{2,3} = 2a \pm \frac{1}{2} \sqrt{4c^2}$$

$$x_2 = 2a + c \quad ; \quad x_3 = 2a - c$$

d.h. bei $x_2=2a+c$ und $x_3=2a-c$ sind zunächst einmal Definitionsgrenzen.

Man kann nun die Ungleichung (*) auch als ein Vergleich von zwei Funktionen auffassen, wobei der Graph der Funktion von x , die auf der rechten Seite der Ungleichung (*) steht, eine nach unten geöffnete Parabel darstellt und der Graph der anderen Funktion von x eine nach rechts geöffnete Parabel darstellt, die sich in zwei Funktionen zerlegen läßt. Die Ungleichung ist dann erfüllt, wenn die Funktionswerte der erstgenannten Parabel jeweils größer sind beim gleichen x -Wert, wie bei den einzelnen Funktionen der anderen Parabel. Wie gezeigt schneiden sich die zwei Parabeln zweimal echt in $x_2=2a+c$ und $x_3=2a-c$ und berühren sich in $x_1=0$. Man muß nun feststellen, ob sich die Schnittpunkte auf der unteren oder oberen Funktion der zweiten Parabel befinden. Dazu untersucht man nun, ob sich die Punkte im positiven oder negativen y -Bereich befinden, da die Funktionswerte von $+c\sqrt{8ax+c^2} \geq 0$ und von $-c\sqrt{8ax+c^2} \leq 0$ sind. Wir müssen sie also nur in den Term $c^2+4ax-2x^2$ einsetzen. Beginnen wir zunächst mit $x_2=2a+c$:

$$c^2 + 4a(2a+c) - 2(2a+c)^2 = c^2 + 8a^2 + 4ac - 8a^2 - 8ac - 2c^2 = -c^2 - 4ac < 0,$$

d.h. $x_2=2a+c$ befindet sich immer im negativen y -Bereich. Das bedeutet, daß dort bei $\frac{1}{2}[(c^2+4ax-2x^2)+c\sqrt{8ax+c^2}]$ ein Vorzeichenwechsel auftritt. Untersuchen wir nun $x_3=2a-c$:

$$c^2 + 4a(2a-c) - 2(2a-c)^2 = c^2 + 8a^2 - 4ac - 8a^2 + 8ac - 2c^2 = -c^2 + 4ac = c(4a-c)$$

Dieses Ergebnis kann nun positiv oder negativ sein. Untersuchen wir, wann es positiv ist:

$$c(4a-c) \geq 0$$

$$4a-c \geq 0 \quad ; \quad \text{da } c > 0$$

$$c \leq 4a$$

Das bedeutet: Für $c \leq 4a$ befindet sich $x_3 = 2a - c$ im positiven y -Bereich, d.h. bei $\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) - c\sqrt{8ax + c^2}]$ tritt ein Vorzeichenwechsel auf. Für $c > 4a$ befindet sich $x_3 = 2a - c$ im negativen y -Bereich, d.h. bei $\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) + c\sqrt{8ax + c^2}]$ tritt ein Vorzeichenwechsel auf. Durch Einsetzen von einem Wert $x > 2a + c$ ergibt sich für $\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) - c\sqrt{8ax + c^2}]$ ein Wert kleiner als Null. Da die Parabel $\pm c\sqrt{8ax + c^2}$ nur für $x \geq -\frac{c^2}{8a}$ definiert ist, sich aber in jedem Falle bei $x_3 = 2a - c$ ein Schnittpunkt ergibt, muß $-\frac{c^2}{8a} \leq 2a - c$ sein. Alle Ergebnisse möchte ich in einem Schema noch einmal darstellen:

$-\frac{c^2}{8a}$	$2a - c$	$2a + c$	
n.d.	+	+	$\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) + c\sqrt{8ax + c^2}]$ für $c \leq 4a$
n.d.	-	-	" für $c > 4a$
n.d.	+	-	$\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) - c\sqrt{8ax + c^2}]$ für $c \leq 4a$
n.d.	-	-	" für $c > 4a$

Somit ergibt sich für die Definitionsmengen:

$$\begin{aligned}
 f_1: x &\mapsto \sqrt{\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) + c\sqrt{8ax + c^2}]} \\
 f_2: x &\mapsto -\sqrt{\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) + c\sqrt{8ax + c^2}]} \\
 f_3: x &\mapsto \sqrt{\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) - c\sqrt{8ax + c^2}]} \\
 f_4: x &\mapsto -\sqrt{\frac{1}{2}[(c^2 + 4ax - 2x^2) - c\sqrt{8ax + c^2}]}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{für } c \leq 4a: D_1 = [-\frac{c^2}{8a}; 2a + c] \\ \text{für } c > 4a: D_2 = [2a - c; 2a + c] \\ \text{für } c \leq 4a: D_3 = [-\frac{c^2}{8a}; 2a - c] \\ \text{für } c > 4a: D_4 = \{\} \end{array}$$

Anmerkungen: a) Für $c = 4a$ gilt: $-\frac{c^2}{8a} = 2a - c$

b) Eigentlich müßte $D_4 = \{0\}$ sein. Dies ist aber wegen der ursprünglichen Bedeutung und Erzeugung der Konchoide nicht sinnvoll.

3.3. Kurvendiskussion der Konchoide

3.3.1. Sonderfälle

Hier möchte ich nur auf Kapitel 2.3.1. verweisen. Die Abschnitte a)-d) gelten analog auch für die Konchoide eines Kreises. Nur unter Abschnitt d) sind die Punkte $P_1(0; c)$ und $P_2(0; -c)$ zugelassen, da $\frac{1}{2}$ zugelassen ist.

3.3.2. Nullstellen

Gehen wir von der allgemein üblichen Konchoidengleichung $(x^2+y^2-2ax)^2-c^2(x^2+y^2)=0$ aus und setzen wir $y=0$, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}(x^2-2ax)^2-c^2x^2 &= 0 \\ x^4-4ax^3+4a^2x^2-c^2x^2 &= 0 \\ x^2[x^2-4ax+(4a^2-c^2)] &= 0\end{aligned}$$

Diese Gleichung haben wir in Kapitel 3.2. schon einmal gelöst. Die Lösungen lauten: $x_1=0$; $x_2=2a+c$; $x_3=2a-c$.

Dabei sind $x_1 \in D_1$ für $c \leq 4a$ mit $f_{12}(x_1)=0$,
 $x_1 \in D_2$ für $c > 4a$ mit $f_{12}(x_1) \neq 0$,
 $x_2 \in D_3$ für $c \leq 4a$ mit $f_{34}(x_2)=0$ und
 $x_2 \in D_2$ für $c > 4a$ mit $f_{12}(x_2)=0$ in jedem Falle Nullstellen

der Konchoide.

Zwar ist $x_1 \in D_1$, da $-\frac{c}{4a} < 0$ und $2a+c > 0$, aber $f_1(x_1) \neq 0$.

Auch ist $x_1 \in D_2$, da $2a-c < 0$ für $c > 4a$, aber auch hier ist $f_2(x_1) \neq 0$.

So kann eine Nullstelle bei $x_1=0$ nur dann vorhanden sein, wenn $c \leq 4a$ und zugleich $2a-c \geq 0$ gilt. Das ist für $c \leq 2a$ der Fall. Dabei gilt: $f_{34}(x_2)=0$.

3.3.3. Symmetieverhalten

Da $f_1(x) = -f_2(x)$ und $f_3(x) = -f_4(x)$ für jedes $x \in D_{\text{Konchoid}}$, ist der Graph der Konchoide symmetrisch zur x-Achse.

3.3.4. Bestimmung der Tangenten

3.3.4.1. Die 1. Ableitung von f_1-f_2

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{1}{2}[(c^2+4ax-2x^2)+c\sqrt{8ax+c^2}]}$$

Nach x abgeleitet ergibt:

$$\begin{aligned}f_1'(x) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}[(c^2+4ax-2x^2)+c\sqrt{8ax+c^2}] \right\}^{-\frac{1}{2}} \cdot [2a-2x + \frac{c}{4}(\sqrt{8ax+c^2})^{-\frac{1}{2}} \cdot 8a] = \\ &= \frac{1}{2 \cdot f_1(x)} \cdot (2a-2x + 2ac \cdot \frac{1}{\sqrt{8ax+c^2}})\end{aligned}$$

$$f_1'(x) = \frac{(a-x)\sqrt{8ax+c^2}+ac}{f_1(x) \cdot \sqrt{8ax+c^2}} = \frac{Z_1(x)}{N_1(x)}$$

Analog gilt: $f_3'(x) = \frac{(a-x) \cdot \sqrt{8ax+c^2} - ac}{f_3(x) \cdot \sqrt{8ax+c^2}} = \frac{Z_3(x)}{N_3(x)}$

$$f_2'(x) = -f_1'(x)$$

$$f_4'(x) = -f_3'(x)$$

3.3.4.2. Senkrechte Tangenten

Senkrechte Tangenten sind dann möglich, wenn $N_1(x)=0$ oder $N_3(x)=0$.

1. Fall: Bei den Nullstellen der Konchoide:

- $x_1=0$: $N_3(x_1)=0$ aber auch $Z_3(x_1)=0$, d.h. dort existiert keine senkrechte Tangente.
- $x_2=2a+c$: $N_1(x_2)=0$
 $Z_1(x_2)=(a-2a-c)(4a+c)+ac=-4ac-c^2-4a^2-ac+ac=-(a+c)^2<0$,
d.h. bei $x_2=2a+c$ existiert eine senkrechte Tangente.
- $x_3=2a-c$:
 $c>4a$: $N_1(x_3)=0$
 $Z_1(x_3)=(a-2a+c)(c-4a)+ac=(c-2a)^2$
 $Z_1(x_3)$ wäre nur dann Null, wenn $c=2a$ wäre. Da aber $c>4a$ gilt, ist $Z_1(x_3)>0$, und für $c>4a$ existiert bei $x_3=2a-c$ eine senkrechte Tangente.
 $c\leq 4a$: $N_3(x_3)=0$
 $Z_3(x_3)=(c-a)(4a-c)-ac=-(c-2a)^2$
Für $c=2a$ gilt $Z_3(x_3)=0$. Für $c\neq 2a$ ist $Z_3(x_3)<0$.
Zusammenfassend kann man sagen, daß für $c\neq 2a$ bei $x_3=2a-c$ eine senkrechte Tangente existiert.

- Fall: Für $\sqrt{8ax+c^2}=0$, d.h. bei $x_4=-\frac{c^2}{8a}$.
Dies ist nur für $c\leq 4a$ möglich, da $x_4\in D_2$ und $x_4\in D_1$.
 $N_1(x_4)=0$, $N_3(x_4)=0$
 $Z_1(x_4)=ac>0$, $Z_3(x_4)=-ac<0$, d.h. es existiert für $c\leq 4a$ eine senkrechte Tangente bei $x_4=-\frac{c^2}{8a}$.

3.3.4.3. Waagrechte Tangenten und die Graphen der Konchoide

Dazu betrachten wir uns die Abbildungen 9a-e:

$c<2a$:

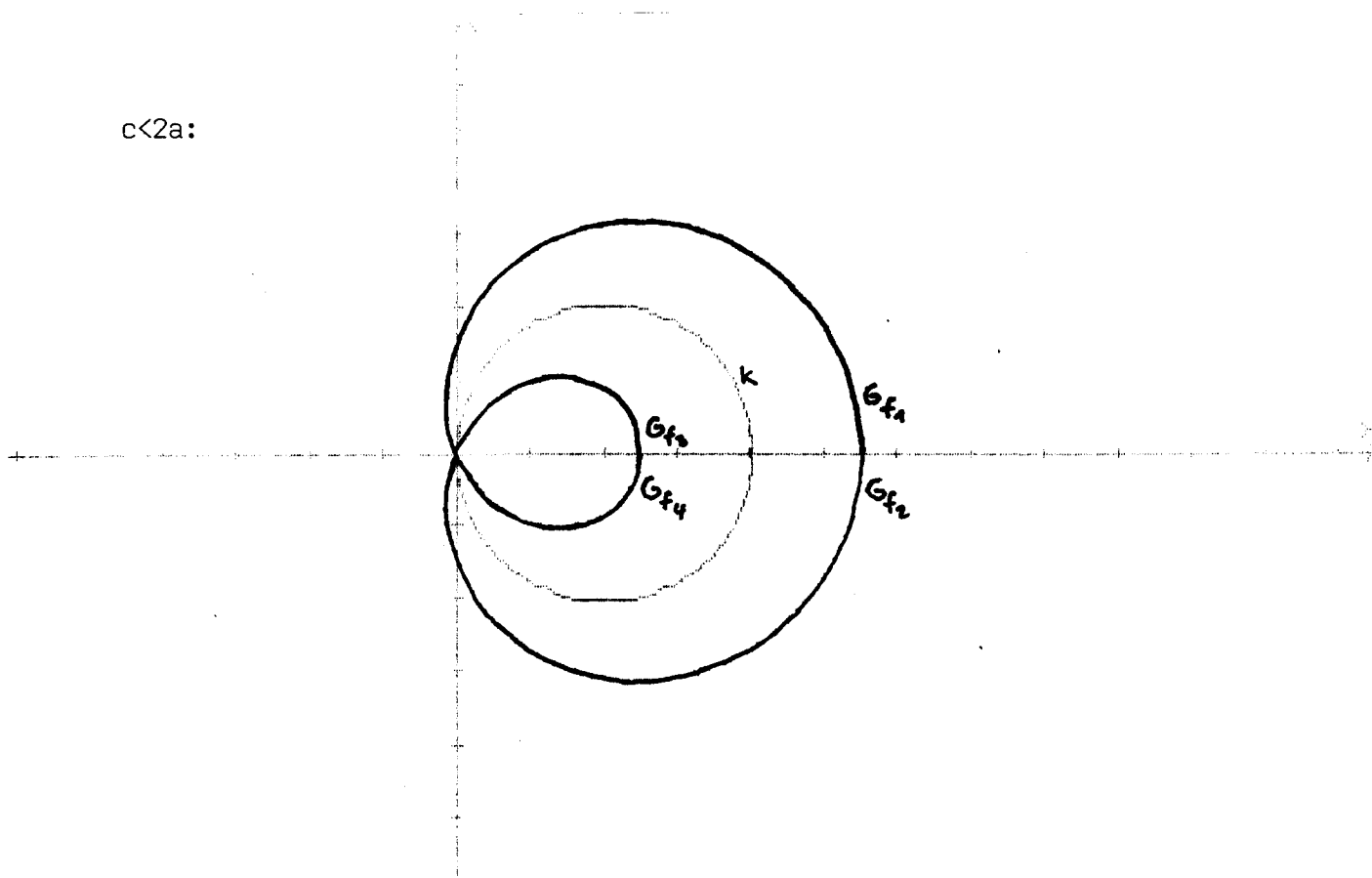


Abb. 9a

$c=2a:$

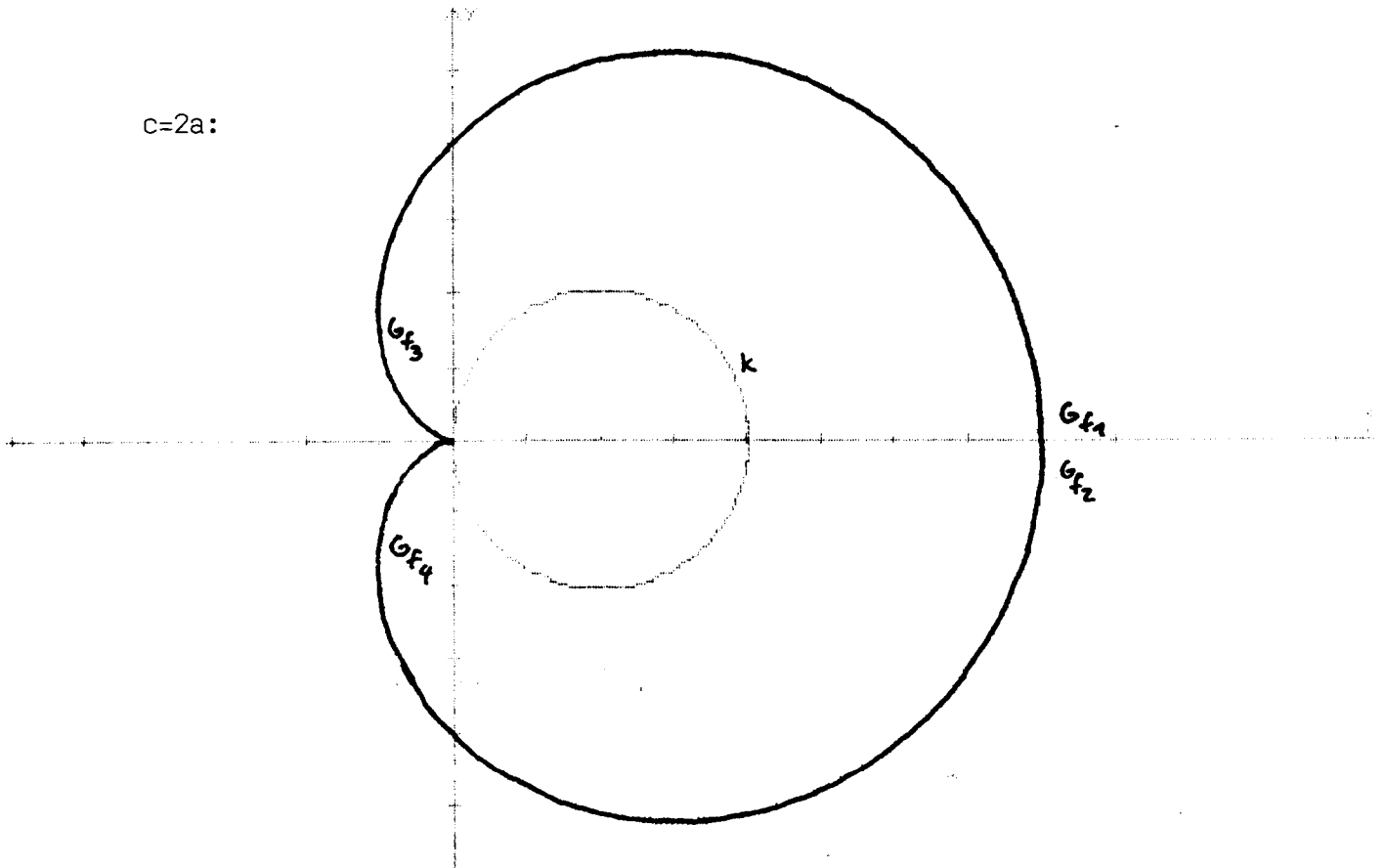


Abb. 9b

$2a < c < 4a:$

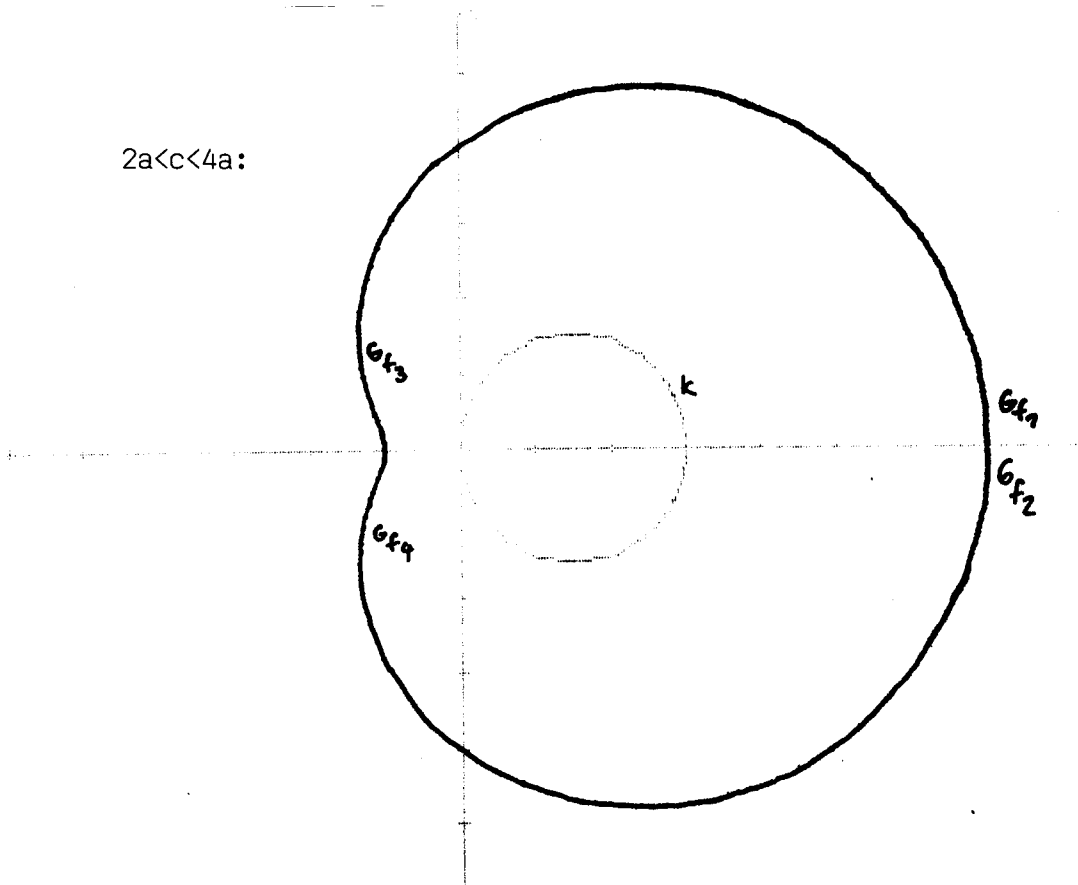


Abb. 9c

$c=4a:$

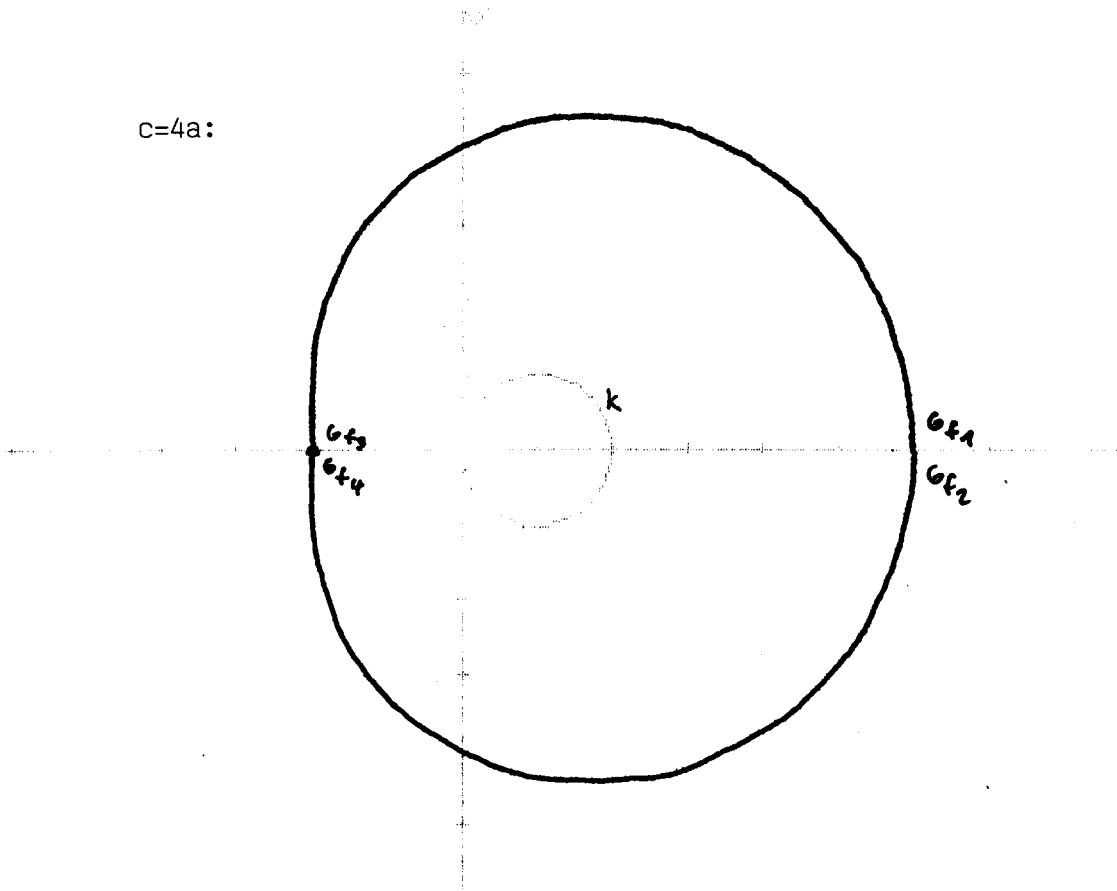


Abb. 9d

$c>4a:$

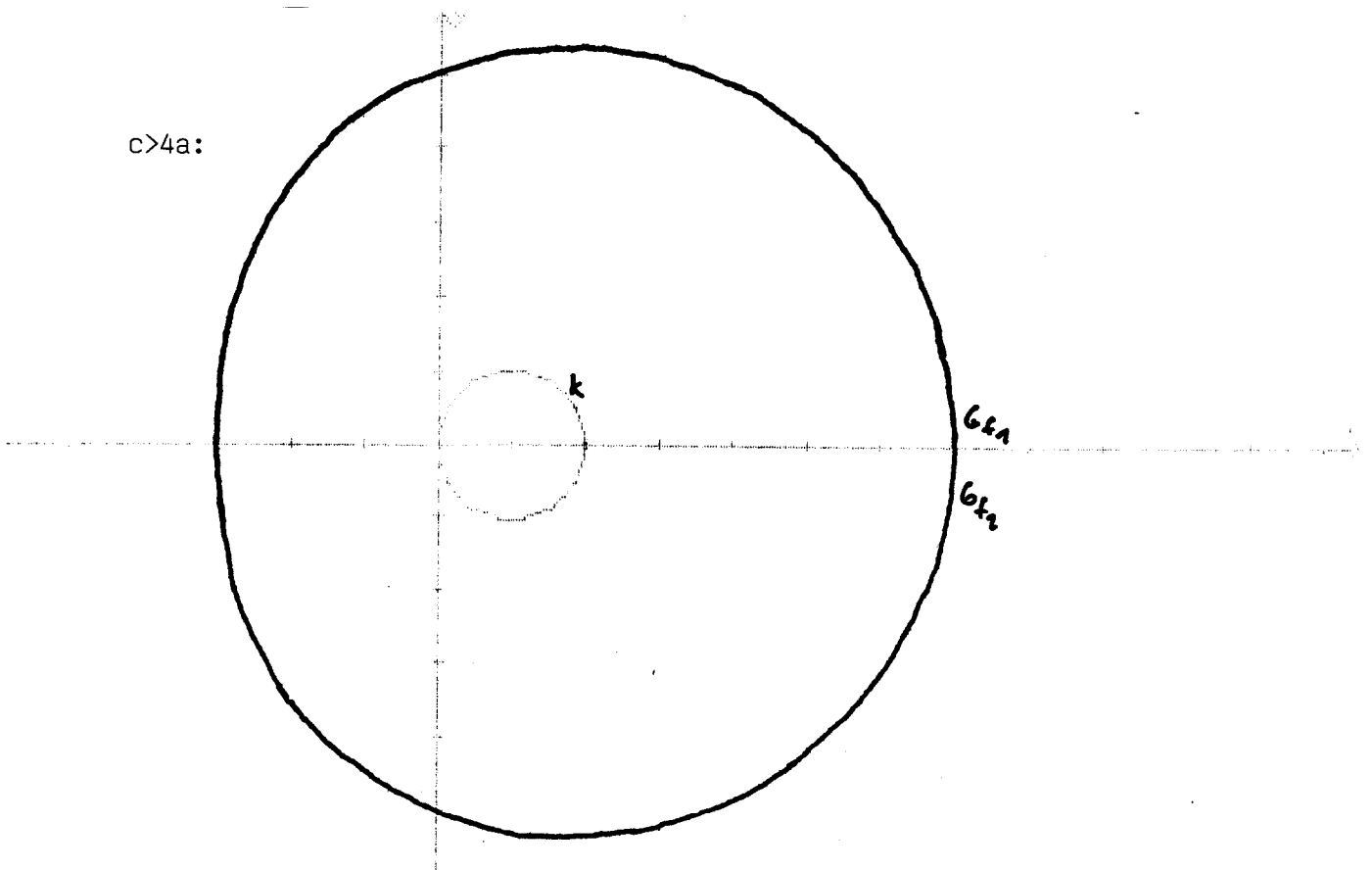


Abb. 9e

Es sind Repräsentanten der bis jetzt unterschiedenen Fälle. Man kann ohne Beweis aus den Abbildungen folgendes erkennen:

Abb.9a: Für $c < 2a$ gibt es für zwei x -Werte x_5 und x_6 waagrechte Tangenten.
 Dabei existiert bei x_5 ein Maximum von $f_1(x)$,
 bei x_5 ein Minimum von $f_4(x)$,
 bei x_6 ein Maximum von $f_3(x)$ und
 bei x_6 ein Minimum von $f_4(x)$.

Abb.9b: Für $c = 2a$ gibt es ebenfalls für zwei x -Werte x_5 und $x_6 = 0$ waagrechte Tangenten. Für $x_6 = 0$ allerdings nur als linksseitigen Grenzwert. Dabei existieren dieselben Extrema wie oben beschrieben.

Abb.9c-e: Für $c > 2a$ gibt es nur für den x -Wert x_5 waagrechte Tangenten. Es bleiben die selben Extrema, wie oben beschrieben.

Nun berechnen wir noch die Werte von x_5 und x_6 . Dazu setzen wir $Z_1(x) = 0$ und $Z_3(x) = 0$:

$$\begin{aligned} (a-x) \cdot \sqrt{8ax+c^2} \pm ac &= 0 \\ (a-x) \cdot \sqrt{8ax+c^2} &= \mp ac \quad |^2 \\ (a-x)^2 (8ax+c^2) &= a^2 c^2 \\ 8a^3 x - 16a^2 x^2 + 8a x^3 + c^2 a^2 - 2a c^2 x + c^2 x^2 &= a^2 c^2 \\ x [8a x^2 + x(c^2 - 16a^2) + (8a^3 - 2a c^2)] &= 0 \end{aligned}$$

1. Fall: $x=0$: Für $x=0$ existiert, wie wir oben gesehen haben nur für $c=2a$ eine waagrechte Tangente.
2. Fall: $8ax^2 + x(c^2 - 16a^2) + (8a^3 - 2ac^2) = 0$
 Zunächst berechnen wir die Diskriminante D :
 $D = (c^2 - 16a^2)^2 - 32a(8a^3 - 2ac^2) = c^4 - 32a^2 c^2 + 256a^4 - 256a^4 + 64a^2 c^2 =$
 $= c^4 + 32a^2 c^2 = c^2(c^2 + 32a^2) > 0$
 Jetzt erhalten wir:

$$x_{5,6} = \frac{16a^2 - c^2 \pm c \sqrt{c^2 + 32a^2}}{16a}$$

Durch Einsetzen von Werten und durch Vergleichen mit den Anfangs gemachten Erkenntnissen erhält man:

$$x_5 = \frac{16a^2 - c^2 + c \sqrt{c^2 + 32a^2}}{16a} \quad \text{und} \quad x_6 = \frac{16a^2 - c^2 - c \sqrt{c^2 + 32a^2}}{16a}$$

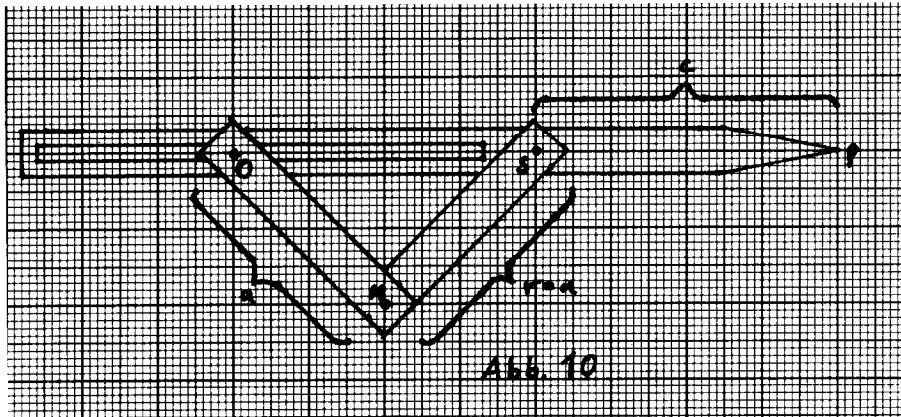
3.3.5. Wendepunkte

Wie man aus den Abbildungen 9a-e erkennen kann, ist ein Wendepunkt nur möglich für $2a < c < 4a$ von f_3 und wegen der Achsensymmetrie auch von f_4 . Ein genauerer Beweis würde hier den Rahmen der Facharbeit sprengen. Für die oben genannten Werte von c muß auch ein Wendepunkt von f_3 im Intervall $]-\frac{c}{2a}; 2a-c[$ existieren, da:

- $f_3(x)$ ist in diesem Intervall differenzierbar.
- In diesem Intervall existieren keine Extrema von f_3 .
- $f_3(x) > 0$ in diesem Intervall.
- Bei $x_1 = -\frac{c}{2a}$ und $x_3 = 2a - c$ existieren senkrechte Tangenten.

3.4. Konstruktion der Konchoide

Zur Konstruktion der Kreis-Konchoide bedient man sich eines 'Zirkels', wie er auch von Schmidt (<2>, S.139) beschrieben wird (s. Abb. 10).



Dabei werden O und M auf der Zeichenunterlage fixiert. Bei Drehung von SM um M beschreibt S den Kreis und P die äußere Konchoidenkurve, die zur Lösung des in Kapitel 5.2.2. beschriebenen Problems genügt. Der Rest der Konchoide muß punktweise konstruiert werden.

4. BASIC-Programm zum Zeichnen von Konchoiden von Funktionen

4.1. Wirkung und Arbeitsweise

Das Programm erlaubt das Zeichnen von Konchoiden von Kreisen, senkrechten Geraden und von beliebigen Funktionen, die durch eine Funktionsgleichung der Form $y=f(x)$ eingegeben werden müssen. Dabei ist auf eine computer-gerechte Eingabe von $f(x)$ zu achten, d.h. Brüche müssen als Division eingegeben werden, der Malpunkt muß durch einen Stern (*), das Divisionszeichen durch einen schrägen Strich (/) ersetzt werden, $\sqrt{x}$ muß als SQR(x) eingegeben werden, u.s.w.. Die Naturkonstanten 'e' und 'pi' stehen unter den Bezeichnungen 'E' bzw. 'PI' zur Verfügung. Näheres darüber ist dem BASIC- Handbuch des Computers zu entnehmen. Nach der Eingabe des Funktions-terms können auch eventuelle Definitionslücken punktweise eingegeben werden. Man kann nun, nachdem die Parametereingabe abgeschlossen wurde, den Ausschnitt des Koordinatensystems frei wählen, und dabei auch x- und y-Maßstab unabhängig voneinander wählen.

Die Konchoide und die Ausgangskurve werden dann in allen Fällen auf dem Bildschirm im gewählten Ausschnitt ausgegeben. Erfolgt eine Ausgabe am Drucker, so gibt er zusätzlich alle notwendigen Daten zu dem Bild aus. Der Punkt O wird vom Computer in den Ursprung des Koordinatensystems gelegt. Die hochauflösende Graphik erlaubt es, daß jeder Punkt $P(x;y)$ mit den Werten x und y auf den Bildschirm 'gesetzt' wird, so daß keine weitere Umrechnung in einen bildschirmeigenen Code nötig ist.

Das Programm fragt alle notwendigen Parameter selbständig ab, reagiert aber nicht auf unlogische oder falsche Eingaben mit einer erneuten Abfrage, außer wenn es vom BASIC-System bedingt wird.

4.2. Besonderheiten

Das Programm ist auf einem Olivetti M20 -Computer mit dem Betriebssystem PCOS erstellt worden. Als Drucker stand ein Olivetti pr2400 Thermo- drucker zur Verfügung. Da der Drucker, im Gegensatz zum Computer, nicht mit dem deutschen Zeichensatz arbeitet, sind im Programmlisting alle 'ü' als 'j' und alle 'ß' als 'B' dargestellt.

Außer den in komfortableren BASIC-Versionen gebräuchlichen Befehlen wird in Zeile 950 der Befehl 'CALL"sp' verwendet. Dieser Befehl dient in PCOS dazu, den aktuellen Bildschirminhalt am Drucker auszugeben, d.h. eine Hardcopy anzufertigen.

4.3. Struktogramm

Das folgende Struktogramm erhebt keinesfalls den Anspruch, das Programm im Detail zu beschreiben, sondern es soll nur die grundsätzlichen Pro- grammsschritte aufzeigen. Die in Klammern angegebenen Zahlen entsprechen den Programmzeilen im Programmlisting.

Schreibe die Überschrift (10-40)		
Schreib: Parametereingabe (80-90)		
Lies: Kurvenart Z (100)		
Z=0	Funktion	
	Kreis	Gerade
	Z=1	Z=2
Lies Funktion $y=f(x)$ (120-150)	Lies: $XM=x_{max}$ $YM=y_{max}$ $RR=r$ (190-220)	Lies: $AA=a$ (230-240)
Lies: Anzahl der De- finitionslücken DL (250)		
Für $0=1$ bis DL (260-280)		
Lies: Definiti- onslücke DL(0)		
Lies: $CC=c$; $PH=\gamma$ (in Bogenmaß); Druckerausdruck $C\$(j/n)$ (290-310)		
Schreib: Maßstabseingabe (350-360)		
Berechnung des Bildschirmausschnitts mit $A=x_{max}$, $B=y_{max}$, $C=x_{min}$ und $D=y_{min}$ aus den Begrenzungs- und/oder Maßstabseingaben K und L. (390-570)		
Zeichnen des Koordinatensystems mit den Daten A, B, C und D. (610-640,1100-1230)		

Zeichnen der Graphen (680)		
Z=0		
	Z=1	
		Z=2
Berechnung der Konchoidenpunkte P(XX;YY) mit Hilfe der Formeln: $XX = x + c \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ $YY = f(x) + c \cdot \sin(\alpha - \varphi)$ für $\alpha = \arctan[f(x)/x]$ für $x \neq 0$ und für $\alpha = \pi/2$ für $x = 0$, und Zeichnen der Konchoide und der Funktion. (700-870)	Berechnung wie bei Z=0, mit $f(x) = \pm \sqrt{r^2 - (x - x_m)^2} + y_m$, und Zeichnen der Konchoide und des Kreises. (1240-1410)	Berechnung der Konchoidenpunkte P(XX;YY) mit den Formeln: $XX = a - c \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ $YY = a \cdot \tan \alpha - c \cdot \sin(\alpha - \varphi)$ mit $\alpha \in [0; 2\pi] \setminus \{\pi\}$. (1420-1490)
Druckerausdruck C\$ (910)		
C\$="j"		C\$="n"
Ausdruck des Bildschirms und aller notwendigen Daten zu dem Ausdruck. (950-1050)		
Ende (150)		

Im Programm kann man am Ende noch entscheiden, ob man die Konchoide noch einmal in einem anderen Maßstab zeichnen will, und ob man eine andere Konchoide zeichnen lassen will.

4.3. BASIC-Programm

```

1 **** Programm zum Zeichnen von Konchoiden
2 **** erstellt am 5.11.1984 für die Facharbeit 1985
3 **** in Mathematik bei Herrn N. Baumann
4 **** (C) 1984 by Axel Findling
10 CLS: E$=""
20 CURSOR(1,6):PRINT E$:PRINT"
30 PRINT E$:PRINT:PRINT"
40 FOR O=1 TO 2000:NEXT O
50 REM
60 REM ***** Parametereingabe *****
70 REM
80 CLS:PRINT"Parametereingabe:"
90 PRINT"-----":PRINT
100 PRINT"Konchoide von:";INPUT"Funktion(=0), Kreis(=1) oder Gerade(=2)";Z
110 IF Z<>0 GOTO 160
120 PRINT"Um die Funktion einzugeben, tippen Sie wie folgt ein:"
130 PRINT" 2000 y=f(x) <ENTER>"
140 PRINT" goto 160 <ENTER>"

```

```
150 END
160 E=2.718281828#:PI=3.1415926536#
170 PRINT"Die Parameter sind wie in der Facharbeit bezeichnet!"
180 ON Z+1 GOTO 250,190,230
190 PRINT"Koordinaten des Kreismittelpunktes:";INPUT" xM=";XM
200 INPUT" yM=";YM
210 INPUT" r=";RR
220 GOTO 290
230 INPUT" a=";AA
240 GOTO 290
250 INPUT"wieviele definitionsblöcke";DL
260 FOR O=1 TO DL
270 : PRINT"definitionsblock Nr. ";O;:INPUT DL(O)
280 NEXT O
290 INPUT" c=";CC
300 INPUT"gamma (in DEG)=";PHI:PH=PHI*PI/180
310 INPUT"Auf drucker (j/n)";C$
320 REM
330 REM ***** Mat-stabseingabe *****
340 REM
350 CLS:PRINT"Mat-stabseingabe:"
360 PRINT"-----":PRINT
370 PRINT"Maße des Bildschirms:"
380 PRINT" x=18.6cm y=11.6cm":PRINT
390 PRINT"jetzt '0' eingeben, falls die Intervallgrenzen eingegeben"
400 PRINT"werden sollen."
410 INPUT" x-Mat-stab: 1/";K:A$="n"
420 IF K=0 GOTO 440
430 INPUT" y-Mat-stab: 1/";L:A$="j"
440 IF A$="j" GOTO 460
450 INPUT "gleicher Mat-stab von x und y (j/n)";B$
460 INPUT "x bis";A
470 IF A$<>"n" GOTO 490
480 INPUT "x von";C
490 INPUT "y bis";B
500 IF A$="j" OR B$="j" GOTO 520
510 INPUT "y von";D
520 IF A$<>"j" GOTO 550
530 C=A-K*18.6
540 D=B-L*11.6
550 IF B$<>"j" GOTO 570
560 D=B-(A-C)*5.8/9.3
570 SCALE C,A,D,B
580 REM
590 REM ***** Koordinatensystem zeichnen *****
600 REM
610 CLS
620 LINE (0,D)-(0,B)
630 LINE (C,0)-(A,0)
640 GOSUB 1100
650 REM
660 REM ***** Graphen zeichnen *****
670 REM
680 ON Z+1 GOSUB 700,1240,1420
690 GOTO 910
700 : FOR I=1 TO 3
710 : : FOR X=C TO A STEP F
720 : : : FOR O=1 TO DL
730 : : : : IF X=DL(O) THEN DM=1
740 : : : : NEXT O
750 : : : IF DM=1 GOTO 850
760 : : : GOSUB 2000
770 : : : IF X=0 THEN AL=PI/2 ELSE AL=ATN(Y/X)
780 : : : ON I GOTO 800,810,820
790 : : : XX=X+BB*CC*COS(AL-PH):YY=Y+BB*CC*SIN(AL-PH):GOTO 830
800 : : : BB=1:GOTO 790
810 : : : BB=-1:GOTO 790
```

```

820 : XX=X:YY=Y:GOTO 830
830 : IF YY<D OR YY>B GOTO 850
840 : PSET (XX,YY)
850 : YY=0:DM=0:NEXT X
860 : NEXT I
870 RETURN
880 REM
890 REM ***** Bildschirm- oder Druckausgabe *****
900 REM
910 IF C#="3" THEN 950
920 CURSOR(1,14):INPUT"Die selbe Konchoide (j/n)";D#
930 IF D#="3" THEN 350 ELSE INPUT"Ende (j/n)";XX#
940 IF XX#="0" THEN 80 ELSE CLS:GOTO 150
950 CALL"SP
960 LPRINT "(X)";C;";(A,"Y)";D;";";B
970 K=(A-C)/18,6:L=(B-D)/11,6
980 LPRINT"X-Massstab:1/"K,"Y-Massstab:1/"L
990 LPRINT"a=";CC,"gamma=";PHI
1000 ON Z+1 GOTO 1010,1040,1060
1010 CURSOR(1,12):PRINT"Weiter durch eintippen von:"
1020 PRINT" run <ENTER>"
1030 LLIST 2000
1040 AA=SQR(XM^2+YM^2):LPRINT"xm=";XM,"ym=";YM,"r=";RR,"a=";AA
1050 GOTO 920
1060 LPRINT"a=";AA:GOTO 920
1070 REM
1080 REM ***** Unterprogramme *****
1090 REM
1100 : F=(A-C)/512:G=(B-D)/256
1110 : PSET (A-F,G):PSET (A-2*F,2*G):PSET (A-3*F,3*G)
1120 : PSET (A-F,-G):PSET (A-2*F,-2*G):PSET (A-3*F,-3*G)
1130 : LINE (A-5*F,9*G)-(A,5*G):LINE (A-5*F,5*G)-(A,9*G)
1140 : PSET (F,B-G):PSET (2*F,B-2*G):PSET (3*F,B-3*G)
1150 : PSET (-F,B-G):PSET (-2*F,B-2*G):PSET (-3*F,B-3*G)
1160 : LINE (5*F,B)-(6*F,B-G):LINE (5*F,B-4*G)-(9*F,B)
1170 : FOR H=FIX(C) TO FIX(A)
1180 : : LINE (H,-2*G)-(H,2*G)
1190 : NEXT H
1200 : FOR J=FIX(D) TO FIX(B)
1210 : : LINE (-2*F,J)-(2*F,J)
1220 : NEXT J
1230 RETURN
1240 : FOR HH=1 TO 2
1250 : : FOR I=1 TO 2
1260 : : : FOR X=XM-RR TO XM+RR STEP F
1270 : : : : ON HH GOTO 1280,1290
1280 : : : : Y=SQR(RR^2-(X-XM)^2)+YM:GOTO 1300
1290 : : : : Y=-SQR(RR^2-(X-XM)^2)+YM
1300 : : : : IF X=0 THEN AL=PI/2 ELSE AL=ATN(Y/X)
1310 : : : : ON I GOTO 1320,1330
1320 : : : : BB=1:GOTO 1340
1330 : : : : BB=-1
1340 : : : : XX=X+BB*CC*COS(AL-PH):YY=Y+BB*CC*SIN(AL-PH)
1350 : : : : IF YY<D OR YY>B GOTO 1370
1360 : : : : PSET (XX,YY)
1370 : : : : YY=0:NEXT X
1380 : : : NEXT I
1390 : NEXT HH
1400 : CIRCLE (XM,YM),RR
1410 RETURN
1420 : FOR AL=0 TO 2*PI STEP PI/360
1430 : : IF AL=PI GOTO 1470
1440 : : XX=AA-CC*COS(AL-PH):YY=AA*TAN(AL)-CC*SIN(AL-PH)
1450 : : IF YY<D OR YY>B GOTO 1470
1460 : : PSET (XX,YY)
1470 : : YY=0:NEXT AL
1480 : LINE (AA,B)-(AA,D)
1490 RETURN
2000 Y=1
2010 : : RETURN

```

5. Verwendung der Konchoide bei nicht elementar lösbaren Problemen

Probleme sind dann elementar lösbar, wenn man sie nur mit Hilfe von Zirkel und Lineal lösen kann. In diesem Kapitel werden nun zwei klassische, nicht elementar lösbare Probleme behandelt.

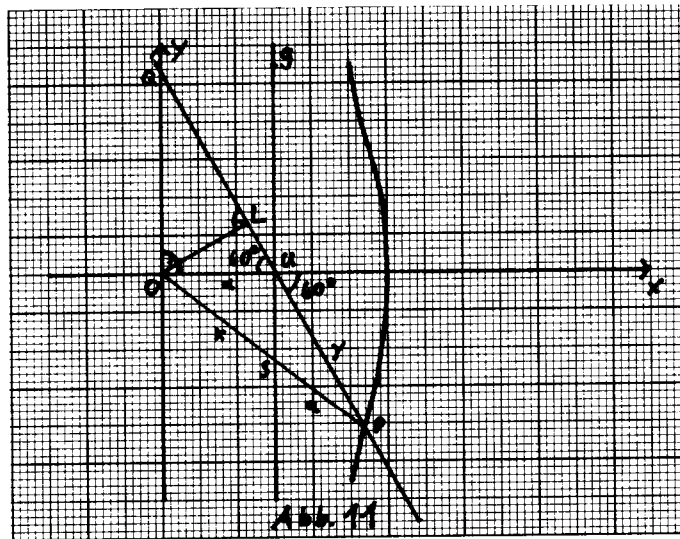
5.1. Verwendung der Konchoide des Nikomedes zur Würfelperdoppelung

Das Ziel der Würfelperdoppelung ist es, einen Würfel mit einem doppelt so großem Volumen wie ein gegebener Würfel zu erhalten. Ist nun a die Seitenlänge des gegebenen Würfels und x die des gesuchten Würfels, so soll gelten:

$$\begin{aligned} x^3 &= 2a^3 \\ \text{oder} \quad x &= \sqrt[3]{2}a \end{aligned}$$

Es muß also aus einer gegebenen Strecke a eine Strecke x der Länge $\sqrt[3]{2}a$ konstruiert werden. Diese Aufgabe ist elementar nicht zu lösen, aber unter Verwendung einer Geraden-Konchoide. Ich stütze mich bei der folgenden Rechnung auf die von Schmidt (<2>, S.106f).

Man zeichne eine gerade Konchoide mit a als Kantenlänge des gegebenen Würfels und mit $c=a$. Man bezeichne den Schnittpunkt der Geraden g und der x -Achse als U und zeichne in O eine Gerade im Winkel von 60° zur x -Achse. Man bezeichne den Schnittpunkt dieser Geraden mit der y -Achse als Q und den Schnittpunkt dieser Geraden mit der Konchoide als P . Zuletzt verbindet man noch P mit O und bezeichnet den Schnittpunkt dieser Strecke mit der Geraden g als S (s. Abb.11).



Es sei: $\overline{OS}=x$; $\overline{UP}=y$

Aus den Eigenschaften der Konchoide folgt: $\overline{SP}=a=\overline{OU}$

Es wird nun behauptet: $x=\sqrt[3]{2}a$

Für den Beweis fällt man zunächst ein Lot von O auf die Gerade QP und bezeichnet den Schnittpunkt mit L .

Für die Länge der Strecke $[QU]$ gilt:

$$\overline{QU} \cdot \sin(30^\circ) = a$$

mit $\angle OQU=30^\circ$ (Winkelsumme im Dreieck)

$$\overline{QU} = \frac{a}{\sin 30^\circ} = 2a$$

Somit gilt nach dem Strahlensatz: $\frac{x}{a} = \frac{2a}{y}$

$$\text{d.h.: } 2ax = \frac{x^2}{a} \quad (\text{I})$$

Im $\triangle OPL$ gilt nach dem Satz von Pythagoras: $\overline{OP}^2 = \overline{LP}^2 + \overline{OL}^2$ mit $\overline{LP} = y + \overline{LU}$

$$\text{Dabei gilt für } \overline{LU}: \overline{LU} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\text{d.h.: } (x+a)^2 = (y + \frac{a}{2})^2 + \overline{OL}^2$$

Im $\triangle OLU$ gilt ebenfalls nach dem Satz von Pythagoras: $\overline{OU}^2 = \overline{LU}^2 + \overline{OL}^2$

$$\text{d.h.: } a^2 = (\frac{a}{2})^2 + \overline{OL}^2$$

Um $\overline{OL}$ zu eliminieren, subtrahieren wir die vorangegangenen Gleichungen voneinander:

$$(x+a)^2 - a^2 = (y + \frac{a}{2})^2 - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + 2ax + a^2 - a^2 = y^2 + ay + \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}$$

$$x^2 + 2ax = y^2 + ay \quad (\text{II})$$

Setzt man nun (I) in (II) ein, erhält man:

$$x^2 + \frac{x^2 \cdot y}{a} = y^2 + ay$$

$$\frac{x^2}{a} (a+y) = y(a+y) \quad | : (a+y), \text{ da } a+y \neq 0$$

$$\frac{x^2}{a} = y$$

$$ay = x^2 \quad (\text{III})$$

Setzt man (III) in (II) ein, erhält man: $x^2 + 2ax = y^2 + x^2$

$$\text{d.h.: } 2ax = y^2 \quad (\text{IV})$$

Aus (III) erhält man: $ay = x^2$, d.h. $x^4 = a^2 y^2$

Setzt man hier (IV) ein, ergibt sich:

$$x^4 = a^2 \cdot 2ax \quad | : x \ (x \neq 0)$$

$$x^3 = 2a^3$$

$$x = \sqrt[3]{2a^3}$$

q.e.d.

5.2. Verwendung der Konchoide zur Winkeldrittung

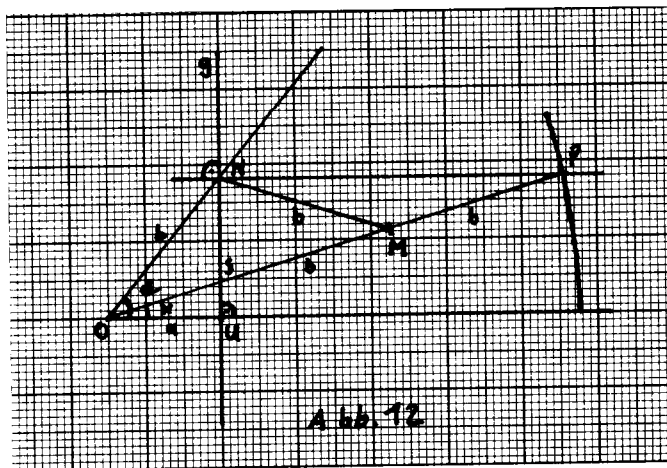
Zu einem gegebenen Winkel α soll ein Winkel x konstruiert werden, so daß gilt: $x = \frac{\alpha}{3}$. Diese Aufgabe ist ebenfalls elementar nicht lösbar, wohl aber unter Zuhilfenahme von Konchoiden.

5.2.1. Mit Hilfe der Konchoide des Nikomedes

Dieses Kapitel habe ich mit Hilfe der Rechnung von Schmidt (<2>, S.107) erarbeitet.

Gegeben sei ein spitzer Winkel α mit Scheitel O. Man trägt nun an dem einen Schenkel des Winkels eine beliebige Strecke $[OU]$ ab und errichte das Lot in U, das den anderen Schenkel des Winkels in N schneidet. Nun

sei $\overline{ON}=b$, und man zeichne die Konchoide zur Gerade NU, mit $a=\overline{OU}$ und $c=2b$. Bringt man nun die Parallele durch N zur Geraden OU mit dem von O entfernten Konchoidenast zum Schnitt, erhält man einen Punkt P. Der Schnittpunkt der Geraden OP mit UN sei S, und der Punkt, der die Strecke [SP] im Verhältnis 1:1 teilt, sei M (s. Abb. 12).



Es sei: $\angle POU=x$

Aus den Eigenschaften der Konchoide folgt: $\overline{SP}=c$; $\overline{SM}=b$; $\overline{MP}=b$

Nun wird behauptet: $x=\frac{\alpha}{3}$

Beweis:

Es gilt: $\angle NPO=\angle POU=x$

Im $\triangle NSP$ gilt wegen dem Satz von Thales: $\overline{MS}=\overline{MP}=\overline{MN}=b$

Nun ist, da $\angle MNP=\angle NPO=x$ (gleichschenkliges Dreieck):

$$\angle NMP=180^\circ-2x$$

$$\text{und } \angle NMO=180^\circ-\angle NMP=180^\circ-180^\circ+2x=2x$$

Da $\triangle ONM$ gleichschenkelig ist, gilt: $\angle PON=\angle NMO=2x$

Nun gilt: $\alpha=\angle PON+x=2x+x=3x$, d.h.:

$$x=\frac{\alpha}{3}$$

Bei nichtspitzen Winkeln α' halbiert man den Winkel i-mal, bis ein spitzer Winkel α übrigbleibt. Für diesen Winkel führt man die Winkeldritteltung durch und verdoppelt den entstandenen Winkel x i-mal zu einem Winkel x' . Beweis:

$$\text{I) } \alpha' = 2^i \cdot \alpha \quad \text{II) } x' = 2^i \cdot x \quad \text{mit } x = \frac{\alpha}{3}$$

$$x' = 2^i \cdot \frac{\alpha}{3}$$

$$\alpha = \frac{3}{2^i} \cdot x'$$

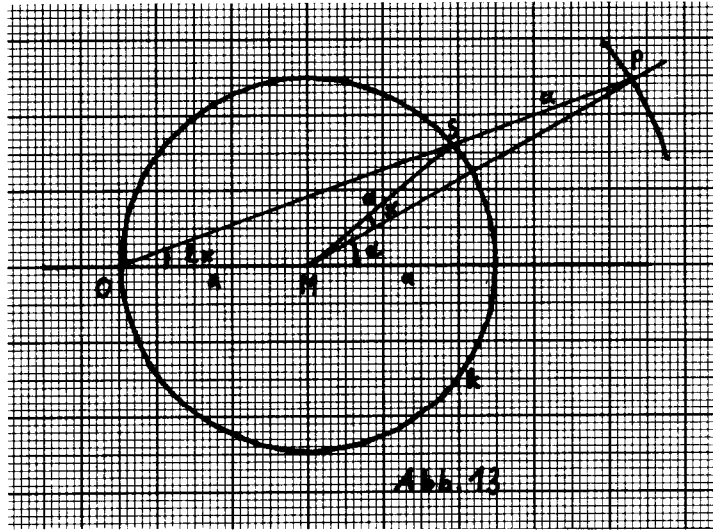
$$\alpha \text{ in I) eingesetzt ergibt: } \alpha' = 2^i \cdot \frac{3}{2^i} \cdot x' \Rightarrow \underline{x' = \frac{\alpha'}{3}}$$

q.e.d.

5.2.2. Mit Hilfe der Pascal'schen Schnecke

In diesem Kapitel habe ich ebenfalls die Berechnungen von Schmidt (<2>, S.139+132) herangezogen.

Gegeben sei ein spitzer Winkel α mit Scheitel M. Um M zeichnet man einen Kreis k mit beliebigem Radius a. Nun schneidet man die Verlängerung des einen Schenkels mit der Kreislinie und erhält den Punkt O. Zu diesem Punkt O und dem Kreis k zeichnet man eine Konchoide für $c=a$. Bringt man nun den anderen Schenkel des Winkels mit der äußeren Kurve der Konchoide zum Schnitt, erhält man den Punkt P. Der zweite Schnittpunkt der Geraden OP mit der Kreislinie sei S (s. Abb.13).



Es sei nun: $\angle POM = 2x$

Aus den Eigenschaften der Konchoide und des Kreises folgt: $\overline{SM} = \overline{SP} = \overline{MO} = a$

Es wird behauptet: $x = \frac{\alpha}{3}$

Beweis:

Da $\triangle OMS$ gleichschenkelig ist, gilt: $\angle MSO = \angle MOS = 2x$

Da auch $\triangle SPM$ gleichschenkelig ist, gilt weiterhin: $\angle SPM = \angle PMS$

Für den Winkel $\angle PSM$ gilt dann: $\angle PSM = 180^\circ - 2x$

und: $\angle PSM = 180^\circ - 2 \cdot \angle SPM$

Durch Gleichsetzen erhält man: $\angle SPM = \angle PMS = x$

Man erkennt aus der Zeichnung: $\angle OMS = 180^\circ - (\alpha + \angle PMS) = 180^\circ - (\alpha + x)$

und es gilt: $\angle OMS = 180^\circ - 2 \cdot \angle MOS = 180^\circ - 4x$

Durch Gleichsetzen erhält man jetzt:

$$\alpha + x = 4x$$

$$\alpha = 3x$$

$$x = \frac{\alpha}{3}$$

q.e.d.

Für nichtspitze Winkel gilt das selbe, wie unter Kapitel 5.2.1. beschrieben wurde.

6. Literaturverzeichnis

- <1> Dr. Wieleitner, Heinrich, Spezielle ebene Kurven, Leipzig 1908
- <2> Schmidt, Hermann, Ausgewählte höhere Kurven, Wiesbaden 1949
- <3> Barth, Mühlbauer, Nikol, Wörle, Mathematische Formeln und Definitionen, München 1976³